

Հ. Ս. Միքայելյան

ԳԵՂԵՑԻԿԸ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԵՎ ԿՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ
Մաս II

ԳԵՂԵՑԻԿԸ
ԵՎ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԿՐԹԱԿԱՆ
ՆԵՐՈՒԺԸ

Երևան 2015

Г. С. Микаелян

ПРЕКРАСНОЕ, МАТЕМАТИКА И ОБРАЗОВАНИЕ
Часть 2

ПРЕКРАСНОЕ
И
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ
МАТЕМАТИКИ

H. S. Mikaelian

BEAUTIFUL, MATHEMATICS AND EDUCATION
Part 2

BEAUTIFUL
AND
EDUCATIONAL POTENTIAL OF
MATHEMATICS

Ереван 2015 Yerevan

ՀՏԴ 18:51:37

ԳՄԴ 87.8+22.1+74.00

Մ 780

Աշխատանքը հրատարակության է երաշխավորել
Խ. Աբովյանի անվան Հայկական պետական մանկավարժական
համալսարանի գիտական խորհուրդը

Գրախոսողներ
Հոգեբանական գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր Մ. Ռ. Գևորգյան
Ֆիզիկոմաթեմատիկական գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր, ՀԱԱ
ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան
Արվեստագիտության դոկտոր, պրոֆեսոր Հ. Հ. Հակոբյան
Մանկավարժական գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր, ՌԴ ՄԳԱ
ակադեմիկոս, արվեստի վաստակավոր գործիչ, Լ. Ս. Ներսիսյան

Միքայելյան Հ. Ս.

Մ 780 ԳԵՂԵՅԻԿԸ, ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԵՎ ԿՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ, Մաս II
ԳԵՂԵՅԻԿԸ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԿՐԹԱԿԱՆ ՆԵՐՈՒԺԸ/
Հ. Ս. Միքայելյան Եր.: Էդիթ Պրինտ, 2015, 440 էջ:

Աշխատանքը կատարվել է ՀՀ Գիտության պետական կոմիտեի կողմից
բազային ֆինանսավորմամբ իրականացվող թեմայի շրջանակներում:

ՀՏԴ 18:51:37

ԳՄԴ 87.8+22.1+74.00

ISBN 978-9939-52-980-6

© Միքայելյան Հ.

Գեղեցիկի հետ մաթեմատիկայի փոխհարաբերության խնդրին մենք անդրադարձել ենք [25] աշխատանքում: Ինչպես գուտ մաթեմատիկայի, այնպես էլ մաթեմատիկական կրթության հետ գեղեցիկի փոխհարաբերությունների խնդիրը համակողմանիորեն ուսումնասիրված է բազմաթիվ հեղինակների կողմից:

Շարունակելով և համակարգելով կատարված ուսումնասիրությունները, մենք խնդիրը ներկայացնում ենք գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշների, մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտության, անձի հուզականային ոլորտի և գեղագիտական դաստիարակության կատեգորիաների տեսանկյուններից:

Անշուշտ, կան հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացին և նրա դասավանդմանը վերաբերող բազմազան ուշագրավ նյութեր, որոնց միջոցով կարելի է մեկնաբանել ներկայացվող ընդհանրական դիտարկումները: Սակայն մենք հաճախ նման փորձը իրականացնում ենք մեր [9]-[11] դասագրքերի նյութի վրա, ինչը նպատակ ունի ընդգծելու դրանց և հեղինակի մոտեցումների հարազատությունը գեղեցիկի սկզբունքներին: Վերջինս արտահայտվում է նաև նյութի ներկայացման ռճի մեջ. այն հաճախ ուղղվում է ոչ թե ընթերցողի մտքին, այլ հուզականզգացմունքային ոլորտին:

Աշխատանքը առաջին հերթին հասցեագրված է մաթեմատիկայի ներկա և ապագա ուսուցիչներին: Սակայն այն կարող են հաջողությամբ օգտագործել նաև հանրակրթության ուսումնական այլ առարկաների ուսուցիչները: Աշխատանքը կարող է հետաքրքիր լինել նաև գեղեցիկի, մաթեմատիկայի և կրթության խնդիրներով զբաղվող այլ մասնագետների համար:

Աշխատանքը կատարվել է ՀՀ Գիտության պետական կոմիտեի կողմից բազային ֆինանսավորմամբ իրականացվող թեմայի շրջանակներում:

Աշխատանքի շարադրանքի բարելավմանը մեծապես նպաստել են ղոցենտներ, փիլիսոփայական գիտությունների թեկնածու Ս. Հակո-

բյանի և հոգեբանական գիտությունների թեկնածու Է. Ջաքարյանի
բազմաթիվ դիտողությունները:

Աշխատանքի առանձին հատվածներ համբերությամբ լսել են
ՀՊՄՀ Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի ամբիոնի մա-
զիստրոսները և «Մաթեմատիկական կրթություն» սեմինարի մասնա-
կիցները:

Իրենց գրախոսություններում աշխատանքը կարևորել են հոգեբա-
նական գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր Ս. Գևորգյանը, ֆիզիկա-
մաթեմատիկական գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր, ՀԱԱ ալա-
դեմիկոս Վ. Ջաքարյանը, արվեստագիտության դոկտոր, պրոֆեսոր Հ.
Հակոբյանը և մանկավարժական գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր,
ՌԴ ՄԳԱ ալադեմիկոս, արվեստի վաստակավոր գործիչ Լ. Ներսիս-
յանը:

Երախտապարտ եմ բոլորին:

Գլուխ 1. ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ
ԴԱՍՏԻԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ ԵՎ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ես չեմ սովորեցնում իմաստություններ, ես
բուժում եմ սգիտությունը:

Պյութագորաս



Պյութագորաս, 571-495 մ.թ.ա.

§1. ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ԴԱՍՏԻԱՐԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ

Մտածող և զգացող մարդ դաստիարակելու
համար, անհրաժեշտ է առաջին հերթին
նրան դաստիարակել գեղագիտորեն:

Ֆրիդրիխ Շիլլեր

Չի կարելի ճանապարհ տալ սերնդին
առանց դրականի և գեղեցիկի սաղմերի:

Ֆեոդոր Դոստոևսկի

1. Գեղագիտական դաստիարակություն. նպատակը, խնդիրները, գործառույթները

Գեղագիտությունը կամ էսթետիկան (հունարեն՝ *aisteticos*-զգայությամբ
ընկալվող) թեև որպես գիտություն ձևավորվել է միայն 18-րդ դարում
(գերմանացի փիլիսոփա Ա. Գ. Բաումգարտենի կողմից), սակայն որպես
իմացության հուզագգացմունքային և գեղեցիկի ճանաչմանն ուղղված
ուղորս գոյություն է ունեցել դեռևս անտիկ շրջանում: Մարդը մշտապես
ունեցել է գեղեցիկի պահանջը, գեղեցիկը կազմել է նրա հոգևոր կյանքի
անքակտելի մասը: Գեղեցիկը բոլոր ժամանակներում համարվել է նաև
իրականության կարևորագույն, ամենահետաքրքիր ու զարմանալի երե-
վոյթներից մեկը, որի ճանաչումը, իմացությունը եղել է մարդկային գոր-
ծունեության (ճանաչողության) հիմնական նպատակներից մեկը: Եվ,
բնականաբար, գեղեցիկի ձևավորումը բոլոր ժամանակներում եղել է նաև
սերունդների դաստիարակության կարևորագույն բաղադրիչ:

Գեղեցիկը ճանաչելու, հասկանալու, զգալու, ինչպես նաև գեղագիտա-
կան այլ ունակությունների նախադրյալները մարդուն տրվում են ժառան-
գաբար: Բայց դրանց ձևավորվումը և զարգացումը հիմնականում իրակա-
նացվում է սոցիալական ամենատարբեր օղակներում, որոնց մեջ կարևոր-
ագույնը, թերևս, հանրակրթությունն է՝ իր գեղագիտական դաստիարա-
կության բաղադրիչով:

Իսկ ի՞նչ է գեղագիտական դաստիարակությունը: Այստեղ բացակա-
յում է միասնական մոտեցումը, և տարբեր հեղինակների կողմից այն բնո-
րոշվում է տարբեր կերպ. որպես իրականության նկատմամբ մարդու

գեղագիտական հարաբերության ձևավորման նպատակաուղղված գործընթաց (տես [51]), որպես շրջակա աշխարհի գեղագիտական ընկալման և գեղեցիկի ստեղծման ունակությունների զարգացում (տես [241]), որպես իրականության նկատմամբ մարդու որոշակի գեղագիտական հարաբերության ձևավորում (տես [246]), որպես անձի հուզագգացմունքային և արժեքային գիտակցության և դրան համապատասխան գործունեության ձևավորման գործընթաց (տես [173]) և այլն: Նկատվող այս անհստակության, ոչ միասնական մոտեցման հիմնական պատճառները երկուսն են՝ անհստակությունը և ոչ միասնական մոտեցումը ինչպես գեղեցիկի, այնպես էլ դաստիարակության բնորոշման հարցերում:

Գեղագիտական դաստիարակությունը բնության և հասարակության ճանաչողության միջոցներից մեկն է: Նրա նպատակը գեղագիտական մշակույթի ձևավորումն է: Այն հաստատում է իրականության օբյեկտների հետ մարդու գեղագիտական հարաբերությունը, ձևավորում է նրա գեղագիտական զգացմունքները, ճաշակը, իդեալը, գեղեցիկը գնահատելու կարողությունը, ապահովում գեղագիտական ունակությունների, կարողությունների, հմտությունների և այլ որակների զարգացումը, ակտիվացնում, ընդլայնում և բավարարում է գեղագիտական պահանջմունքները, գեղեցիկը ընկալելու և ստեղծագործելու հնարավորությունները: Գեղագիտական դաստիարակությունը ներդաշնակ է դարձնում մարդուն, զարգացնում նրա ստեղծագործական ունակությունները:

Գեղագիտական դաստիարակությունը իրականացնում է երկու հիմնական գործառույթ. այն ձևավորում է սովորողի արժեհամակարգի և արժեքային կողմնորոշման գեղագիտական բաղադրիչը և զարգացնում նրա գեղագիտական և ստեղծագործական ներուժը: Այն նաև մարդկային փոխհարաբերությունների կարգավորման միջոց է. մարդը միշտ ձգտում է դեպի գեղեցիկը: Այս տեսակետից դաստիարակության գեղագիտական և բարոյական բաղադրիչները մոտենում են իրար:

Ընդհանրապես, գեղագիտական դաստիարակությունը սերտորեն կապված է, ավելին՝ ինչ-որ իմաստով միահյուսվում է ինչպես բարոյական դաստիարակության, այնպես էլ ինտելեկտուալ զարգացման հետ: Այդ կապերին դեռևս հինգերորդ դարում անդրադարձել է հայ պատմիչ և փիլիսոփա Եզնիկ Կողբացին, ով գտնում է, որ մարդու ստեղծած գեղեցիկը պետք է ծառայի բարուն (տես [6], էջ 169):

Գեղցիկի և բարու փոխհարաբերությունները և համապատասխան արժեքների ձևավորման խնդիրները եղել են բոլոր ժամանակների հետա-

գոտողների ուշադրության կենտրոնում: Որոշ հետազոտողներ հակված են գեղագիտական դաստիարակությունը ներառել բարոյական դաստիարակության մեջ: Հայտնվում է նաև տեսակետ, ըստ որի գեղեցիկը ծառայում է որպես բարոյական դաստիարակվածության մակարդակ: Գեղագիտական դաստիարակության շնորհիվ հնարավոր է դառնում նաև անձի հոգևոր աշխարհի գեղագիտական, բարոյական և ինտելեկտուալ բաղադրիչների միջև լիակատար ներդաշնակության հաստատումը:

Կա մարդու բարոյականի վրա գեղագիտականի ազդեցության մի հատուկ տեսակ, որ անվանվում է մաքրագործում (կատարսիս): Արիստոտելը մաքրագործումը կապում է ողբերգության հետ. «Ողբերգական ներկայացումները մաքրագործում են մարդկանց բարոյական աշխարհը. դիտելով ողբերգությունները, ուր ցույց են տրվում ճակատագրով հալածվող մարդկանց տանջանքները, հանդիսատեսը ցավակցության զգացումով է լցվում դեպի տառապյալը, իսկ դա նրան դարձնում է վերին աստիճանի մարդկային, մաքրագործում է նրա հոգին» (տես [6], էջ 20):

Գեղագիտական դաստիարակությունը իրականացվում է բոլոր հասակներում: Եվ ինչքան շուտ է մարդը ենթարկվում նպատակաուղղված գեղագիտական ներգործության, այնքան մեծ է դրա արդյունավետ լինելու հավանականությունը:

2. Մաթեմատիկական կրթությունը և գեղագիտական դաստիարակության հիմնախնդիրը

Հանրության մեջ կա այն թյուր կարծիքը, թե հանրակրթական դպրոցում գեղագիտական դաստիարակության խնդիրը պետք է իրականացնել միայն արվեստի կամ էլ առավելագույնը՝ հումանիտար ցիկլի ուսումնական առարկաների միջոցով: Այս կապակցությամբ Ժամանակակից ճանաչված ռուս նկարիչ և մանկավարժ Մ. Բ. Նեմենսկին գրում է. «Գեղագիտական դաստիարակության համակարգը նախ և առաջ պետք է լինի միասնական, միավորի բոլոր առարկաները, արտադասարանական պարապմունքները, դպրոցականի հասարակական ողջ կյանքը, որտեղ պարապմունքի յուրաքանչյուր տեսակ գեղագիտական մշակույթի և անձնավորության ձևավորման գործում ունի իր խնդիրը» (տես [145]):

Սակայն ոչ հումանիտար ուսումնական առարկայի ուսուցիչը գեղագիտական արժեքների ձևավորմանը հատկացնում է աննշան տեղ կամ էլ

ընդհանրապես չի դիտարկում նման խնդիր, մանավանդ երբ խոսքը վերաբերում է առաջին հայացքից գեղագիտությունից ու գեղեցիկից հեռու այնպիսի մի ուսումնական առարկայի, ինչպիսին մաթեմատիկան է: Մինչդեռ հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ուսումնական բնագավառի առարկաները կարևոր տեղ են զբաղեցնում ուսումնական առարկաների ցանկում և, միաժամանակ, ունեն գեղագիտական արժեքների ձևավորման, գեղագիտական դաստիարակության մեծ ներուժ: Այդ խնդրի լուծման համար հիմք են ծառայում մաթեմատիկայի և գեղագիտական արժեքների միջև առկա խորքային կապերը, որոնք դրսևորվում են երաժշտության, նկարչության, ճարտարապետության և արվեստի այլ բնագավառներում մաթեմատիկայի լայն կիրառություններով (տես [25]): Մյուս կողմից, մաթեմատիկական ավելի, քան գիտության որևէ այլ բնագավառ, բավարարում է գիտական գեղեցիկին ներկայացվող պահանջներին: Ավելին, մարդկային խոսքի այնպիսի կարևորագույն տարրեր, ինչպիսիք են հիմնավորվածությունը, տրամաբանական խստությունը և ապացուցվածությունը, որոնք համարվում են գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշներ, իրենց լիարժեք դրսևորումը ստանում են հենց մաթեմատիկայում (տես [7]):

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գեղագիտական տարրի բացահայտումը ոչ միայն նպաստում է սովորողի գեղագիտական ունակությունների զարգացմանը, այլև թույլ է տալիս ավելի արդյունավետ դարձնել բուն մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը: Օրինակ, սովորողների տոկոսությունը, նպատակասլացությունը, հետևողականությունը և կամային այլ որակները լավագույնս դրսևորվում են մաթեմատիկական նյութի և դասավանդման գործընթացի մեջ գեղագիտական բաղադրիչի առկայության դեպքում (տես [19]):

Գեղագիտական արժեքների ձևավորման հարցը սերտորեն առնչվում է մաթեմատիկայի գիտական և կրթական բովանդակությունների փոխհարաբերության, մաթեմատիկայի ուսուցման նպատակների, գործառույթների, արդիականացման, մաթեմատիկական օբյեկտների՝ հասկացությունների, թեորեմների, ապացուցումների, խնդիրների ու դրանց լուծման և այլ հիմնախնդիրների հետ:

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով սովորողների գեղագիտական դաստիարակության խնդիրը ուսումնասիրվել է բազմաթիվ հետազոտողների կողմից: Մաթեմատիկայի ուսումնաճանաչողական գործընթացի գեղագիտական բաղադրիչի իրականացման և խորացման

հարցը համակողմանիորեն ուսումնասիրել են Վ. Ա. Կրուտեցկին, Վ. Լ. Մինկովսկին, Ս. Ի. Շոխոբ-Տրոցկին, Գ. Ի. Սարանցևը և ուրիշներ:

Հետազոտությունների մի սովոր խումբ զբաղվել է մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով սովորողների և ապագա ուսուցիչների մոտ գեղագիտական արժեքների ձևավորման հարցով: Եղած տեսակետների մեջ Օ. Վ. Չերնիկը առանձնացնում է երկու մոտեցում՝ պասիվ-հայեցողական և ակտիվ-գործնական (տես [228], էջ 14-21): Նրա կարծիքով առաջինները (Ի. Գ. Ջենկևիչ, Վ. Տ. Կովեշնիկով, Վ. Լ. Մինկովսկի) մաթեմատիկայի գեղագիտական ներուժի բացահայտումը հանգեցնում են մաթեմատիկական բովանդակությամբ տարասեռ օբյեկտների ոչ համակարգված ուսումնասիրության, օբյեկտներ, որոնք հեղինակների կարծիքով ունեն գեղագիտական գրավչություն: Նրանք որպես գեղեցիկի հատկանիշ մեծ նշանակություն են տալիս մաթեմատիկական օբյեկտների կիրառական նշանակությանը: Մեծ տեղ տալով գեղեցիկ խնդրին և նրա լուծմանը, այս հետազոտողները չեն բացահայտում դրանց էությունը: Ակտիվ-գործնական մոտեցում իրականացնողները (Վ. Գ. Բոլտյանսկի, Օ. Ա. Կոբալիա, Ն. Վ. Գուայեվա, Ն. Լ. Ռոշչինա, Ն. Ի. Ֆիրստովա) «առաջին անգամ լինելով, կիրառում են «գեղագիտական նշանակություն», «գեղագիտական ներուժ», «գեղագիտական գրավչություն» հասկացությունները և փորձում են գիտականորեն հիմնավորված սահմանել դրանք» (տես [228], էջ 16): Հարկ է նշել, որ Օ. Վ. Չերնիկի նշած այդ «սահմանումները» իրականում հանգում են մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ կամ սուբյեկտիվ առանձին հատկանիշների նկարագրության և, ըստ էության, նշված հասկացությունների սահմանումներ մեզ չեն առաջադրվում: Իրականում դժվար է որևէ մեկի կողմից ակնկալել ասենք «գեղագիտական գրավչություն» հասկացության ճշգրիտ սահմանումը: Վ. Գ. Բոլտյանսկին, օրինակ, իր բանաձևով (գեղեցիկը = դիտողականություն + անսպասելիություն = իզոմորֆիզմ + պարզություն + անսպասելիություն), ըստ էության, ոչ ճիշտ, ոչ արդարացի և անհստակ ու մշուշապատ ձևով մաթեմատիկական գեղեցիկը հանգեցնում է նրա գեղագիտական երկու-երեք հատկանիշների, իսկ Օ. Ա. Կոբալիան մաթեմատիկական գիտական գեղեցիկի հատկանիշներ է համարում անգամ իմացության մեթոդները: Ավելին, ինչպես նշվեց այս աշխատանքի առաջին մասում (տես [25], էջ 69), գիտական գեղեցիկի այնպիսի կարևոր հատկանիշ, ինչպիսին է առարկայի էությունը հասկանալու համար գործադրված ջանքերի քանակը, Գ. Բիրկ-հոֆը և Հ. Այգենլը հասկանում են տրամագծորեն հակառակ կամ ավելի

ճիշտ կլինի ասել՝ հակադարձ նշանակությամբ. մեկի համար այն գեղեցիկի դրական հատկանիշ է, մյուսի համար՝ բացասական: Հետևաբար, գիտական գեղեցիկի հատկանիշներն արդեն կարծես ունեն հակասական մեկնաբանություններ, ինչը ցույց է տալիս դրանց ընդհանուր, բոլորի կողմից շատ թե քիչ ընդունելի բնութագրման բացակայությունը կամ անհնարինությունը:

Մեր կարծիքով հետազոտությունների նշված փուլը կարելի է համարել գիտական գեղեցիկի հատկանիշների իմաստավորման, շրջան: Հետագայում ուսումնասիրությունները կրել են ավելի համակարգված բնույթ: Այսպես, Ն. Վ. Գուսյեվան համակողմանիորեն ուսումնասիրել է դպրոցական մաթեմատիկայի գեղագիտական ներուժի բացահայտման հետ կապված տեսական և գործնական մի շարք հարցեր, համակարգել է գիտական գեղեցիկի հատկանիշները՝ ելնելով մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտությունից, ցույց տվել հանրակրթական դպրոցի 5-6-րդ դասարաններում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում դրանց կիրառման ուղիները (տես [86]), Ե. Վ. Լիկսինան ուսումնասիրել է համանման հարցերի լուծման ճանապարհները մաթեմատիկայի ապագա ուսուցիչների պատրաստման համակարգում (տես [129]), Մ. Ա. Ռոդիոնովը նույն հեղինակի հետ միասին ուսումնասիրել է ուսուցման գեղագիտական ուղղվածության արդիականացման խնդիրը (տես [169]), առաջադրել է մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշների իր համակարգը (տես [171]), Յու. Մ. Ռոմանենկոն [172] զբաղվել է հարցի փիլիսոփայական տեսանկյունով, Ն. Լ. Ռոշչինան [174] դիտարկել է հարթաչափության խնդիրների լուծման գործընթացում սովորողների գեղագիտական ճաշակի ձևավորման խնդիրը, Օ. Վ. Չերնիկը [228] դիտարկել է մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով սովորողների գեղագիտական դաստիարակվածության զարգացման խնդիրը, Ն. Ի. Ֆիրստովան [213] հետազոտել է մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով սովորողների գեղագիտական դաստիարակության, մասնավորապես, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում կատակերգականի ձևավորման խնդիրը և այլն:

Մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացում գեղագիտական դաստիարակության հարցը ուսումնասիրվել է նաև հումանիստական արժեքների ձևավորման տեսանկյունից: Այստեղ անհրաժեշտ է հիշատակել Գ. Ի. Սարանցի [179], Մ. Ի. Ռոդիոնովի [170], Գ. Վ. Դորոֆեյեվի [88], Տ. Ա. Իվանովայի [98], Ա. Ի. Ազնիչի [40] և այլոց աշխատանքները: Մասնավոր-

րապես, Մ. Ի. Ռոդիոնովը կարևորում է գեղագիտականի դերը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի մոտիվացիայի հարցում (տես [170], էջ 139), Ա. Ի. Ազնիշը մաթեմատիկայի հումանիտար նշանակությունը հիմնականում պայմանավորում է գեղեցիկով, իսկ վերջինիս իրականացման ճանապարհը տեսնում է մաթեմատիկայի կիրառական հնարավորությունների մեջ (տես [40], էջ 175):

Ա. Լ. Ժոխովը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գեղագիտականի ձևավորման հարցը կարևորում է սովորողների աշխատանքային ձևավորման տեսակետից՝ այն դիտելով որպես դրա իրականացման ուղեկիշ (տես [93], էջ 288):

3. Համակարգային մոտեցում մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով գեղագիտական դաստիարակության խնդրի լուծմանը

Վերևում մենք անդրադարձանք մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով գեղագիտական դաստիարակության իրականացման հիմնահարցին: Հարկ է նշել, որ այս ուղղությամբ կատարված բոլոր աշխատանքներում նկատվում է ուսումնասիրությունների որոշ սահմանափակում, ինչը արդյունք է մի շարք պատճառների:

Այդ աշխատանքներում գիտական կամ մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշները չեն տարանջատվում ըստ իրենց օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ բնույթների, ինչը սահմանափակում է գեղեցիկի ընկալման հնարավորությունները: Այստեղ նշենք, օրինակ, որ առանց գեղագիտականի սուբյեկտիվ բնույթը հաշվի առնելու, դժվար է հասկանալ Գ. Բիրկհոֆի և Հ. Այզենկի տրամագծորեն հակառակ մոտեցումները առարկայի էությունը հասկանալու համար գործադրված ջանքերի գեղագիտական բնույթը մեկնաբանելիս:

Միայն Ն. Բ. Ֆիրստովան է գեղեցիկի հետ միասին դիտարկում նաև կատակերգականը (տես [213]): Մնացած բոլոր հետազոտություններում գեղագիտական արժեքների ձևավորումը, ըստ էության, հանգում է գեղեցիկի ձևավորման խնդրին, իսկ գեղագիտական մյուս կատեգորիաները մնում են ուսումնասիրությունից դուրս: Մասնավորապես, չի քննարկվում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում տգեղի ձևավորման հարցը: Այնինչ, յուրաքանչյուր բնագավառում, նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում, գեղեցիկի հետ միասին առկա է նաև տգեղի երևան գալու

հնարավորությունը: (Գեղեցիկը ճանաչվում է տգեղի հետ փոխհարաբերության ընթացքում:) Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում տգեղը ունի դրսևորման բազմաթիվ հնարավորություններ (տես ստորև՝ էջ 84-86), և ուսուցման նպատակներից մեկը տգեղի նմանատիպ դրսևորումներից խուսափելն է: Որևէ ուսումնասիրություն չի արձարծում մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով վեհի գեղագիտական արժեքի ձևավորման խնդիրը և, ընդհանրապես, վեհի ու մաթեմատիկայի փոխհարաբերության հարցը: Մինչդեռ այստեղ նույնպես առկա է հետաքրքիր փոխհարաբերությունների բազմազանությունը (տես [24]): Նույնը կարելի է ասել նաև ողբերգականի, ստորի և գեղագիտական մնացած արժեքների մասին:

Հետազոտողների ուշադրությունից դուրս է մնացել մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում սովորողների հույզերի, մասնավորապես՝ գեղագիտական հույզերի դրսևորման և ձևավորման հարցը, այնինչ այստեղ նույնպես կան որոշակի օրինաչափություններ (տես [23]): Սրան պետք է ավելացնել նաև այնպիսի զգացմունքների ձևավորման հարցի անտեսումը, որոնք չունեն զուտ գեղագիտական բնույթ և իրենց բարոյական ու ինտելեկտուալ դրսևորումների հետ միասին, ցուցաբերում են նաև ընդգծված գեղագիտական երանգներ: Այդպիսիք են սերը, համակրանքը, հետաքրքրությունը և այլն (տես [14]): Նույնը կարելի է ասել նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով գեղագիտական պահանջմունքների ձևավորման մասին (տես [22]):

Չափազանց կարևոր է թվում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով գեղագիտական դաստիարակության կատեգորիաների ձևավորման հարցը: Այս ուղղությամբ դիտարկված է միայն գեղագիտական ճաշակի ձևավորման խնդիրը Ն. Լ. Ռոշչինսայի [174] կողմից: Մինչդեռ, գեղագիտական դաստիարակության հարցի ուսումնասիրությունը ամբողջացնելու համար կարևոր է նաև նրա մնացած կատեգորիաների դիտարկումը: Այստեղ առաջին հերթին կարևորագույն նշանակություն ունի գեղագիտական հարաբերության խնդրի պարզաբանումը: Պարզվում է, որ նախ անհրաժեշտ է և օգտակար գեղագիտական հարաբերությունը դիտարկել որպես սուբյեկտիվ հարաբերություն: Իսկ վերջինիս պարագայում էլ ոչ թե սահմանափակվել միայն երկկողմ հարաբերություններով, ինչպես ընդունված է հոգեբանության մեջ, այլ դիտարկել նաև եռակողմ և բազմակողմ սուբյեկտիվ հարաբերությունները: Այս մոտեցումը հնարավորություն է տալիս գեղագիտական հարաբերությունը դիտարկել նաև բարոյական արժեքների տեսանկյունից, ճիշտ հասկանալ և բացատրել

գեղագիտական հարաբերություններում և ուսումնական գործընթացում դրսևորվող մի շարք սուբյեկտիվ առնչություններ, գեղագիտական հույզեր և զգացմունքներ, մաթեմատիկական կամ գիտական գեղեցիկի հատկանիշները բաժանել ըստ օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ դրսևորումների, ինչը ունի կարևոր դիդակտիկական նշանակություն:

Գեղագիտական հարաբերությունների հետ միասին անհրաժեշտ է ուսումնասիրել նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գեղագիտական ընկալման, գեղագիտական զարգացման, գեղագիտական իդեալի, գեղագիտական ճշմարիտի, գեղագիտական գնահատականի և գեղագիտական դաստիարակության մյուս կատեգորիաների ձևավորման հարցերը:

Այնուհետև, թվում է, թե գեղագիտական դաստիարակության իրականացման ընթացքում շատ կարևոր է գանազանել գեղագիտական արժեքի անշարժ և շարժուն (պոտենցյալ և կինետիկ) վիճակները, ինչից բխում է նաև գեղագիտականի ընդհատությունը և անընդհատությունը: Գեղագիտական արժեքի շարժուն վիճակն առաջանում է, երբ սուբյեկտը հանդիպում է գեղագիտական արժեքը կրող օբյեկտին, վերջինս ազդում է սուբյեկտի վրա. մարդը ունենում է գեղագիտական ապրումներ՝ համակրանք, հույզեր, ուրախություն և այլն: Սակայն երբեմն, երբ գեղագիտական այդ նույն արժեքը կամ այն կրող օբյեկտը որոշ ժամանակ մնում է սուբյեկտի տեսադաշտում, կարծես դադարում է վերջինիս վրա հուզական ներգործություն ունենալուց, և թվում է, թե այդ օբյեկտն է գրկվում գեղագիտական իր արժեքից: Սակայն դա այդպես չէ. բավական է կորցնել նման օբյեկտը կամ նրա գեղագիտական հատկանիշը, և մարդը անմիջապես կզգա այդ արժեքը և կուռնենա համապատասխան ապրումներ: Օրինակ, եթե պատին կախված նկարը թեքված է, ապա մենք զգում ենք անհարմարություն, անբավարարվածություն, որովհետև խախտվել է գեղագիտական կարգը կամ կարգի գեղագիտական հատկանիշը. մենք անմիջապես ուղղում ենք նկարը, որից հետո միայն զգում ենք բավարարված: Այսպիսով, մարդը, տիրապետելով ինչ-որ գեղագիտական արժեքի, իր հետագա գործունեության մեջ, եթե անգամ չի գիտակցում նրա գոյությունը, էլնում է այդ արժեքից, հենվում է նրա վրա, այսինքն՝ այդ արժեքը զգում է ենթագիտակցորեն: Նման անշարժ կամ պոտենցյալ արժեքների համախմբությունը կազմում է մարդու հոգևոր աշխարհի մի մասը: Նշենք, որ Ա. Վ. Վոլոշինովը (տես [66], էջ 15-16) օգտագործում է պոտենցյալ և ակտուալ գեղեցիկի հասկացությունները՝ որպես առաջինի դրսևորման

աղբյուր դիտելով քառսը, իսկ երկրորդի համար՝ կարգը, իսկ Մ. Ա. Ռոդիոնովը [171] ըստ էության խոսելով մաթեմատիկական գեղեցիկի պոտենցիալ և ակտուալ վիճակների մասին, հիմնականում կանգ է առնում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով պոտենցիալ գեղեցիկի ակտուալացման խնդրի վրա:

Այստեղ մեր դրույթը հետևյալն է. այն ամենը, ինչն ազդում է մարդու զգայարանների վրա, ինչի վրա մարդը ուշադրություն է դարձնում, ինչը ներկայանում է որպես արժեք կամ ընկալվում է՝ ունի նաև գեղագիտական բաղադրիչ և մարդու կողմից ենթարկվում է գեղագիտական գնահատման և արժևորման. ընկալվում է որպես գեղեցիկ կամ տգեղ. վեհ կամ ստոր, կատակերգական կամ ողբերգական: Այսպիսով, գեղագիտականը ամեն ինչի մեջ է. չկա առարկա կամ երևույթ, որը գեղագիտական բաղադրիչ չունենա: Այստեղ տեղին է հիշել Օ. Ա. Կոբալիայի արված հետևյալ դիտարկումը. «Երկրաչափության յուրաքանչյուր տարր. լինի դա գծագիր, թեորեն, թե ասպացուցում, մեթոդ կամ գաղափար, կարող է ծառայել որպես գեղեցիկի դրսևորման օրինակ» (տես [110], էջ 78): Ասվածը մեր դրույթի միայն մի մասի հաստատումն է:

Շատ կարևոր է տարբերել նաև գեղագիտականի կամածին և ոչ կամածին բնույթները: Գեղեցիկը մեծ մասամբ աչքի է ընկնում միանգամից՝ իր արտաքին տեսքով, և նրա հայտնաբերումը չի ենթադրում սոբյեկտի կամային գործողություն: Այսինքն՝ գեղեցիկը իր արտաքին տեսքի, դրսևորման մեջ առաջին հերթին ոչ կամածին է: Սակայն հաճախ էլ հայեցվող օբյեկտը կարող է աչքի ընկնել ոչ թե իր արտաքին տեսքով, այլ ներքին գեղեցկությամբ, ինչի հայտնաբերումը կպահանջի մտածողության, կամքի և հոգեկան այլ ուժերի լարում: Նման դեպքերում գեղագիտականը կունենա կամածին բնույթ: Այս դիտողությունը առանձնապես կարևոր է նկատի ունենալ գիտական կամ մաթեմատիկական գեղեցիկի հետ շփվելիս, որտեղ գեղագիտականը հիմնականում հանդես է գալիս սուբյեկտի կամային գործունեության արդյունքում:

Մաթեմատիկայի միջոցով սովորողների գեղագիտական դաստիարակության համատեքստում կարևոր է թվում արվեստի գործառույթների հետ մաթեմատիկայի գործառույթների համեմատությունը: Ուրիշ խոսքով, անհրաժեշտ է թվում պարզել, թե արդյոք մաթեմատիկան և նրա ուսուցման գործընթացը՝ հիմքում ունենալով գեղագիտական մոտեցումների որոշակի համակարգ, կարող են իրականացնել մարդու և հասարակության համար արվեստի գործառույթներին համահունչ դրսևորումներ:

Ելնելով ասվածից, սույն աշխատանքում մենք առաջարկում ենք մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով գեղագիտական դաստիարակության խնդրի համակարգային մոտեցում, որում.

1) Տրվում են մաթեմատիկական օբյեկտների գեղագիտական գնահատման հստակ չափանիշներ մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշների տեսքով:

2) Մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով գեղագիտական դաստիարակությունը դիտվում է որպես գեղագիտականի շարժուն և անշարժ ձևերի, ընդհատի և անընդհատի միասնություն, որում գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշների, մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտության հենքի վրա դրսևորվում են գեղագիտական դաստիարակության բոլոր կատեգորիաները, իրենց արտահայտությունը գտնելով սովորողների հուզագգացմունքային ապրումներում:

3) Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գիտական գեղեցիկի դիրքերից դիտարկվում են.

ա. գեղագիտական հիմնական արժեքները,

բ. գեղագիտական դաստիարակության կատեգորիաները՝ իրենց փոխադարձ կապի մեջ,

գ. գիտական գեղեցիկի և հոգեկան երևույթների փոխհարաբերությունները, մասնավորապես՝ այն հույզերը և զգագացմունքները, որոնք ունեն ընդգծված գեղագիտական երանգներ:

§2. ՍՈՒԲՅԵԿՏԻՎ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆ

Իդեալական գեղեցկությունը ոչինչ չարժե,
Եթե նրանով ոչ մեկը չի հիաստում:

Օնորե դը Բալզակ

1. Սուբյեկտիվություն և օբյեկտիվություն

Դաստիարակության և, ընդհանրապես, կրթական գործընթացի շատ կողմեր կարելի է դիտել որպես այդ գործընթացի հետ կապված մարդկանց, առարկաների ու երևույթների հետ աշակերտի փոխհարաբերություններ: Այդ փոխհարաբերությունները լավ հասկանալու համար կարելի է հստակեցնել մարդու կենսագործունեության այն կողմերը, որոնք նրան բնութագրում են որպես սուբյեկտ:

Ընդհանրապես «սուբյեկտ» (լատիներեն՝ ենթակա, հիմքում ընկած) եզրույթը գործածվում է առօրեական խոսակցության, լեզվի, տրամաբանության, հոգեբանության, փիլիսոփայության մեջ, մարդկային գործունեության այլ ոլորտներում և կիրառվում է տարբեր նշանակություններով: Մենք այն կիրառելու ենք գործողության կրող լինելու իմաստով. սուբյեկտը նա է, ով ճանաչում է, մտածում կամ գործում: Հոգեբանության մեջ, սոցիոլոգիայում և մարդու մասին որոշ այլ գիտություններում որպես սուբյեկտ են ընկալվում նաև մարդկային առանձին խմբերը (խմբային կամ կոլեկտիվ սուբյեկտ), որոնք որոշակի գործունեության, ճանաչողության, գիտակցության կրողներ են (տես [147]): Սուբյեկտին հակադրվում է օբյեկտը (լատիներեն՝ առարկա), որին ուղղված են սուբյեկտի մտքերը, գործողությունները:

Սուբյեկտից ածանցվում է սուբյեկտայինը՝ մարդու ցանկացած գործունեություն և մարդու կողմից ստեղծված ամեն ինչ: Դրանից դուրս ամեն ինչ օբյեկտային է: Սուբյեկտայինի մաս է կազմում սուբյեկտիվը: Այստեղ առկա է բնորոշումների բազմազանությունը. սուբյեկտիվը շրջակա աշխարհի մասին մարդու (մտածող սուբյեկտի) պատկերացումների արտահայտությունն է, նրա տեսակետները, զգացմունքները, համոզմունքները և ցանկությունները (տես [258]), կամ՝ սուբյեկտիվը հարաբերություն է ինչ-որ բանի հետ, որը պայմանավորված է սուբյեկտի անձնական հայացքներով, հետաքրքրություններով կամ ճաշակով, օբյեկտիվության բացակա-

յություն է (տես [79]), կամ՝ պայմանավորված է անձնական ճաշակով, նախապատվություններով, համոզմունքներով, մտավախություններով, այսինքն՝ օբյեկտիվության, անաչառության բացակայություն (տես [92]), կամ էլ՝ սուբյեկտիվությունը այն է, ինչ մարդու բնության մեջ է, ինչը նրան դարձնում է այդպիսին՝ սեփական անհատականությունը, նրան հատուկ հատկությունների համալիրը, սուբյեկտիվը նշանակում է նաև մեկ սուբյեկտի մտքերի, ապրումների, զգացմունքների արտացոլումը (տես [226]):

Հոգեբանության մեջ սուբյեկտիվ եզրույթը հիմնականում գործածվում է երկու իմաստով:

ա. Սուբյեկտիվ - մարդուն՝ սուբյեկտին պատկանող: Այս տեսակետից սուբյեկտիվ են բոլոր հոգեկան գործունեությունները, այդ թվում նաև նրանք, որոնք բացահայտում են օբյեկտիվ իրականությունը և արտահայտում են օբյեկտիվ ճշմարտություններ:

բ. Սուբյեկտիվ - իմացության կամ գործողության օբյեկտին ոչ համարժեք/ադեկվատ, կողմնակալ, կանխակալ, միակոմանի:

Յուրաքանչյուր մարդ, օգտագործելով առաջին իմաստով սուբյեկտիվը, աշխատում է հաղթահարել երկրորդ իմաստով նրա նշանակությունը (տես [161]):

Սուբյեկտիվությունը շրջակա աշխարհի մասին մարդու (մտածող սուբյեկտի) պատկերացումների, տեսակետների, զգացմունքների, համոզմունքների և ցանկությունների արտահայտությունն է: Օբյեկտիվությունը հասկացվում է որպես պատկանելիություն օբյեկտին, սուբյեկտից անկախ լինել, երևույթների կամ գործոնների բնութագրում սուբյեկտի կամքից կամ ցանկություններից անկախ, անկախություն մարդկային գիտակցությունից, կամքից, ցանկություններից ու ճաշակներից (տես [259]): Այսպիսով, եթե սուբյեկտիվը գոյություն ունի միայն սուբյեկտի շնորհիվ, ապա օբյեկտիվը գոյություն ունի անկախ սուբյեկտից:

2. Երկկողմ սուբյեկտիվ հարաբերություն

Գեղագիտական գործունեության հիմքում ընկած է սուբյեկտիվ հարաբերության հասկացությունը: Ըստ Բ. Ֆ. Լոմովի «Բ» տարբերություն օբյեկտիվ հարաբերության, ինչը դրսևորվում է երկու օբյեկտների փոխգործունեությամբ, սուբյեկտիվ հարաբերությունը արտահայտում է մարդու վերաբերմունքը ինչ-որ մեկի կամ ինչ-որ բանի հանդեպ, նրա կողմից մեկի

նախապատվություն տալը մյուսի նկատմամբ, երևույթների, գործընթացների, մարդկանց կողմնակալ գնահատումը» (տես [102], էջ 299): Այսպիսով, սուրյեկտիվ հարաբերությունը ունի առնվազն երկու կողմ: Երբ կողմերը ճիշտ երկուսն են՝ առաջին կողմը սուրյեկտը, իսկ երկրորդը՝ կամայական օբյեկտ, կամ էլ որևէ սուրյեկտ, նման հարաբերությունը կանվանենք երկկողմ սուրյեկտիվ հարաբերություն:

Երկկողմ սուրյեկտիվ հարաբերությունները լայն կիրառություն ունեն հոգեբանության մեջ և ուսումնասիրված են հանգամանորեն: Սուրյեկտ-օբյեկտ ձևաչափով ընթացող հարաբերությունների միջոցով է, օրինակ, բացատրվում զգացմունքների տարանջատումը հույզերից (տես [102], էջ 300-301): Որպես սուրյեկտիվ հարաբերություններ են դիտարկվում նաև գեղագիտական հարաբերությունները: Ուսումնական գործընթացում դրսևորվում են ուսուցիչ-աշակերտ, աշակերտ-աշակերտ, աշակերտ-դասապրոցես, աշակերտ-ուսումնական առարկա և այլ երկկողմ սուրյեկտիվ հարաբերություններ:

Հոգեբանները առանձնացնում են սուրյեկտիվ երկկողմ հարաբերության գնահատող, հուզական և դրդիչ կողմերը: Հարաբերության գնահատող կողմը դրսևորվում է նրա օբյեկտը այլ նմուշների, էտալոնների, նվաճման մակարդակների հետ համեմատելիս: Այստեղ սուրյեկտի կողմից օբյեկտին տրվում են լավ կամ վատ, հաճելի կամ տհաճ, ազնիվ կամ անազնիվ, գեղեցիկ կամ տգեղ, ճիշտ կամ սխալ և նմանատիպ այլ գնահատականներ, որոնք հիմք են ծառայում նրա նկատմամբ որոշակի վերաբերմունք ցույց տալու համար: Հարաբերության հուզական կամ արտահայտչական կողմը կապված է հարաբերության օբյեկտին տված հուզական գնահատականի պատճառով առաջացած ապրումների հետ: Հարաբերության դրդիչ կողմը դրսևորվում է դուր եկած օբյեկտին տիրանալու կամ նրանից բաժանվելու, նրա հետ առնչվելու կամ նրանից խուսափելու, նրանով զբաղվելու կամ չզբաղվելու ցանկության դրսևորմամբ (տես [102], էջ 300):

3. Եռակողմ սուրյեկտիվ հարաբերություն

Նկատենք, որ ինչպես փիլիսոփայական, այնպես էլ հոգեբանական գրականության մեջ սուրյեկտիվ հարաբերությունը հիմնականում դիտվում է որպես երկկողմ՝ սուրյեկտ-օբյեկտ կամ սուրյեկտ-սուրյեկտ ձևա-

չափերով ընթացող գործընթաց: Օգտակար է, սակայն, նշված և այլ ոլորտներում դիտարկել նաև բազմակողմ, մասնավորապես՝ եռակողմ հարաբերությունները (մաթեմատիկայում, օրինակ, նման հարաբերություններն ունեն լայն կիրառություն): Իսկապես, երկու մարդու միջև հարաբերությունները, սովորաբար, ընթանում են ինչ-որ հանգամանքներում՝ առիթով, միջավայրում, իրադրության մեջ, գործընթացում և այլն: Եվ նման հարաբերությունների արդյունքը շատ կողմերով կախված է հենց այդ հանգամանքներից: Օրինակ, երգչի տված համերգը իրականացվում է ինչ-որ դահլիճում, որոշակի հանդիսատեսի համար, և հաջողությունը պայմանավորված է նաև ինչպես դահլիճի տեխնիկական հարմարություններով, այնպես էլ հանդիսատեսի պատրաստվածությամբ, տրամադրվածությամբ և այլ հանգամանքներով: Իսկ համերգի ընթացքում մենք առնչվում ենք երգիչ-երգ-հանդիսատես, երգիչ-երգ-դահլիճ (նկատի ունենք դահլիճի ֆիզիկական կողմը), երգիչ-երգ-դահլիճ (նկատի ունենք հանդիսատեսների բազմությունը), հանդիսատես-երգ-երգիչ, հանդիսատես-երգ-հանդիսատես և այլ եռակողմ հարաբերությունների:

Եռակողմ հարաբերությունները լայնորեն կարող են օգտագործվել հոգեբանության մեջ: Միայն եռակողմ հարաբերության միջոցով կարելի է, օրինակ, բացատրել խանդի, նախանձի, չարախնդության, բամբասանքի, թշնամանքի զգացմունքները:

Եռակողմ հարաբերությունները մեծ դեր ունեն նաև ուսումնական գործընթացում: Թեև մանկավարժական գրականության մեջ լայնորեն են դիտարկվում ուսուցիչ-աշակերտ փոխհարաբերությունները, սակայն ուսուցչի և կոնկրետ աշակերտի միջև երկկողմ հարաբերությունները ոչ միշտ են ակտիվորեն դրսևորվում: Կան ուսուցիչներ, օրինակ, որոնք ողջ դասի ընթացքում ոչ միայն չեն հարաբերվում առանձին աշակերտների հետ, այլև նրանց չեն էլ նկատում կամ էլ նկատում են միայն այն դեպքում, երբ հարկ են համարում դիտողություն անել: Հետևաբար, ուսուցման ու դաստիարակության վերաբերող շատ հարցեր դժվար է հասկանալ կամ բացատրել առանց ուսուցիչ - աշակերտ հարաբերություններում դասարանի կամ ուսումնական առարկայի միջնորդավորված դերը դիտարկելու, այսինքն՝ առանց դիտարկելու «ուսուցիչ - ուսումնական առարկա - աշակերտ», «ուսուցիչ - դասարան - աշակերտ» և նմանատիպ եռակողմ այլ հարաբերություններ: Ասվածը վերաբերում է նաև ուսուցման մեթոդներին: Օրինակ, վերջին ժամանակներում շատ է խոսվում ուսուցման ինտերակտիվ մեթոդների մասին, որոնք, ըստ էության, հանգում են

«ուսուցիչ - աշակերտ - աշակերտ» եռակողմ հարաբերության, որում դրսևորվում է կողմերից յուրաքանչյուրի ակտիվությունը մնացած երկու կողմերի նկատմամբ:

Եթե երկկողմ սուբյեկտիվ հարաբերությունները կարող են ընթանալ սուբյեկտ-օբյեկտ կամ սուբյեկտ-սուբյեկտ ձևաչափերից յուրաքանչյուրով, ապա եռակողմ սուբյեկտիվ հարաբերությունները ընթանում են սուբյեկտ-օբյեկտ-սուբյեկտ կամ էլ սուբյեկտ-սուբյեկտ-սուբյեկտ ձևաչափերով: Ելնելով մեր առջև դրված խնդիրներից, մենք մեծ մասամբ կդիտարկենք առաջին տիպի եռակողմ հարաբերությունները: Եթե նման հարաբերությունը գրառենք A-X-B տեսքով, ապա A-ն և B-ն կանվանենք տված հարաբերության սուբյեկտներ կամ ծայրանդամներ, իսկ X-ը՝ նրա միջուկ: Նման եռակողմ հարաբերությունից ածանցվում են A-X և B-X սուբյեկտ-օբյեկտ և A-B սուբյեկտ-սուբյեկտ երկկողմ հարաբերությունները:

Եռակողմ հարաբերությունները նույնպես ունեն գնահատող, հուզական և դրդիչ կողմեր: Եռակողմ հարաբերության գնահատող կողմը, ի տարբերություն երկկողմ հարաբերության, կարող է լինել ներդաշնակ, երբ հարաբերության սուբյեկտները միակարծիք են կամ համանման լավ կամ վատ, հաճելի կամ տհաճ և այլ գնահատական են տալիս օբյեկտին: Սակայն երբ գնահատականները իրարամերժ են, այդ դեպքում հարաբերությունը կարող է լինել ոչ ներդաշնակ (անառողջ, պայթուսավտանգ կամ հակասական): Այսպիսով, եռակողմ հարաբերությունը ունի պայթուսավտանգ լինելու հնարավորություններ, և առողջ հարաբերություն ստեղծելու պայամաններից մեկը կողմերի միջև անհամատեղելիություններից խուսափելն է: Հասկանալի է նաև, որ սուբյեկտ-օբյեկտ բնույթի երկկողմ հարաբերությունը հակասական չի կարող լինել, իսկ սուբյեկտ-սուբյեկտ տիպի երկկողմ հարաբերության հակասականությունն էլ կունենա ինչ-որ պատճառ, այսինքն՝ կլինի հակասության այդ պատճառը հանդիսացող մի երրորդ կողմ, իսկ դա նշանակում է, որ տրված հակասական երկկողմ հարաբերությունը ածանցվում է ինչ-որ եռակողմ հարաբերությունից:

Եռակողմ հարաբերության հուզական գործառույթը ևս կարող է դրսևորվել ինչպես ներդաշնակ, այնպես էլ աններդաշնակ կամ հակասական արտահայտվածություններով: Առաջին դեպքում հարաբերության միջուկը միատեսակ՝ դրական կամ բացասական հուզական արտահայտություն է ստանում նրա ծայրանդամների՝ սուբյեկտների համար: Օրինակ, երզը երկու լսողներին միաժամանակ դուր է գալիս: Երկրորդ դեպ-

բում սուբյեկտներից մեկը ունենում է դրական, իսկ մյուսը՝ բացա-սական հուզական ապրում. երգը մեկին հուզում է, մյուսին՝ գրգռում: Առաջին դեպքում մենք հարաբերությունը կարող ենք գնահատել որպես առողջ, երկրորդում՝ անառողջ:

Հարաբերության դրդիչ գործառույթը նույնպես կարևոր դեր ունի նրա բնույթի՝ ներդաշնակության կամ հակասականության տեսանկյունից: Այստեղ առանձնապես վտանգավոր է, երբ հարաբերության երկու ծայրանդամներին էլ դուր է գալիս նրա միջուկը և երկուսն էլ ուզում են տիրանալ դրան: Այդ դեպքում մենք կունենանք որոշակի հակասություն նրա ծայրանդամների միջև, ինչը կարող է հանգեցնել խանդի, թշնամանքի, կռվի, պատերազմի և նմանատիպ այլ գործողությունների: Հարկ է նկատել, որ նման դեպքերում սուբյեկտների գործունեությունը կախված է հարաբերության բնույթից, նյութական, թե հոգևոր է հարաբերությունը, իսկ վերջին դեպքում էլ՝ բարոյական, ինտելեկտուալ, թե գեղագիտական է այն:

Այսպիսով, եռակողմ հարաբերությունը՝ իր միջուկի նկատմամբ սուբյեկտներին տված գնահատականի, ապրումների և մղումների տեսանկյունով կարող է լինել հակասական, ներդաշնակ կամ չեզոք: Այն կարող է լինել.

ա. հակասական, երբ օբյեկտին տված սուբյեկտների գնահատականները բարձր են և ունեն տարբեր նշաններ, կամ երբ նրա նկատմամբ սուբյեկտների ապրումները խորն են և նույնպես ունեն տարբեր նշաններ, կամ երբ սուբյեկտները հարաբերության նյութական միջուկի նկատմամբ ունեն միատեսակ դրական (տիրանալու) մղումներ:

բ. ներդաշնակ, երբ օբյեկտին տված սուբյեկտների գնահատականները և նրա նկատմամբ սուբյեկտների ապրումները նույնպես ունեն միևնույն նշանները և սուբյեկտները հարաբերության միջուկի նկատմամբ ունեն միատեսակ, բայց հոգևոր դրդիչ մղումներ:

գ. չեզոք, երբ սուբյեկտների գնահատականները բարձր չեն, ապրումները խորը չեն կամ սուբյեկտները միջուկի հանդեպ ունեն տարբեր մղումներ:

Օրինակ, մարզական միջոցառման ընթացքում մենք ունենք (մարզասեր - մարզական միջոցառում - մարզասեր) եռակողմ հարաբերությունը: Եվ կախված նրանից, թե սուբյեկտ-մարզասերները միջոցառման որ կողմի համար են «ցավում» (կամ էլ ոչ մեկի համար չեն «ցավում») հարաբերությունը կարող է լինել ներդաշնակ, հակասական կամ չեզոք:

Այսինքն, երկու մարգասերներ իրար հետ կարող է գտնվել հակասական (ցավում են տաբբեր թիմերի կամ մարզիկների համար), ներդաշնակ (ցավում են միևնույն թիմի կամ մարզիկի համար) կամ չեզոք (նրանցից մեկը չի ցավում թիմերից կամ մարզիկներից մեկի համար) հարաբերության մեջ:

Բնական է, որ մարդկային գործունեության յուրաքանչյուր ոլորտում նախընտրելի են ներդաշնակ հարաբերությունները: Սակայն հարաբերությունները, դրանց ստեղծումը պայմանավորված են ամենատարբեր գործոններով ու դրդապատճառներով, և ներդաշնակ հարաբերությունների ստեղծումը միշտ չէ, որ հնարավոր է դառնում:

§3. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԳԵՂԵՑԻԿԻ ՍՈՒԲՅԵԿՏԻՎ ՏԵՄԱՆԿՅՈՒՆԸ

Մեզ համար, որ հունական մտքի ժառանգության ծանրությունից մեր ուսերը կրած քայլում ենք Վերածննդի հերոսների հետքերով, քաղաքակրթությունը անըմբռնելի է առանց մաթեմատիկայի:

Անդրե Վայլ

1. Մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշները

Այս աշխատանքի առաջին մասում մենք հանգամանորեն կանգ առանք գիտական կամ մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշների վրա՝ առանց շոշափելու դրանց գեղագիտական էությունը բացահայտելու հարցը: Որոշ հետազոտողներ փորձում են ինչ-որ լուծումներ տալ այդ հարցին, ուրիշները, փորձելով հստակեցնել համապատասխան հասկացությունները, աշխատում են բերել դրանց սահմանումները կամ գոնե տալ ինչ-ինչ բնորոշումներ: Նման փորձերը թեև օգնում են լավ հասկանալու նյութը, սակայն կրում են մոտավոր բնույթ:

Թեև գիտության մեջ գեղեցիկի հարցը դիտարկվել է դեռևս հնադարից. Պլատոնը արդեն խոսում է գեղեցիկ ուսմունքների մասին, սակայն գիտական գեղեցիկին նվիրված հատուկ ուսումնասիրության մենք առաջին անգամ հանդիպում ենք 18-րդ դարի շոտլանդացի փիլիսոփա Ֆրենսիս Հաչեյսոնի մոտ: Ինչպես Հաչեյսոնը, այնպես էլ հետագա ուսումնասիրողները բավարարվում են գիտական գեղեցիկի հատկանիշների առաջադրմամբ և աշխատում են գիտական (հիմնականում՝ մաթեմատիկական) օբյեկտների գեղագիտական գրավչությունը գնահատել՝ ելնելով գիտական գեղեցիկի իրենց նշած հատկանիշների հետ դրանց համապատասխանությունից: Ընդ որում, տարբեր հետազոտողներ դիտարկում են գիտական գեղեցիկի տարբեր հատկանիշներ, հանդիպում են նաև տրամագծորեն հակառակ մոտեցումներ մինևույն հատկանիշի գեղագիտական գնահատականի վերաբերյալ: Ճիշտ է, Ն. Վ. Գոլայեվան [86] կատարում է մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշների որոշ դասակարգում, սակայն նա ելնում է մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտությունից, իսկ հատկանիշների ընդհանուր դասակար-

գումը՝ ըստ դրանց գեղագիտական էության, չի կատարում: Գիտական գեղեցիկին նվիրված բոլոր աշխատանքներում գիտական կամ մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշները չեն տարանջատվում ըստ իրենց օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ բնույթների, ինչը սահմանափակում է գեղեցիկի ընկալման հնարավորությունները: Այստեղ նշենք, օրինակ, որ առանց գեղագիտականի սուբյեկտիվ բնույթը հաշվի առնելու, դժվար է հասկանալ Գ. Բիրկհոֆի և Հ. Այզենկի տրամագծորեն հակառակ մոտեցումները առարկայի էությունը հասկանալու համար գործադրված ջանքերի գեղագիտական բնույթը մեկնաբանելիս:

Այս աշխատանքի առաջին մասում մենք կանգ առնենք գիտական կամ գիտական գեղեցիկի հատկանիշների դասակարգման խնդրի վրա՝ ելնելով դրանց օբյեկտիվ կամ սուբյեկտիվ բնույթից: Նման մոտեցումը օգնում է ավելի լավ հասկանալու դրանց էությունը և դրսևորման առանձնահատկությունները:

Գիտական գեղեցիկի հատկանիշների մի մասը վերաբերում է գիտության այս կամ այն բնագավառի կամ միաժամանակ մի քանի բնագավառների օբյեկտներին. դրանք այդ օբյեկտների հատկություններ են: Այդպիսիք են համաչափությունը, ներդաշնակությունը, օպտիմալությունը, տրամաբանական խստությունը, հստակությունը և այլն: Համաչափությունը, օրինակ, մաթեմատիկայի, ֆիզիկայի, քիմիայի և բնական այլ գիտությունների ամենատարբեր օբյեկտների հատկություն է, տրամաբանական խստությունը գիտական մտքի հատկություն և այլն: Նման հատկանիշները մենք անվանում ենք գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշներ:

Գիտական գեղեցիկի հատկանիշների մյուս մասը վերաբերում է սուբյեկտին. գեղեցիկի ի հայտ գալը պայմանավորված է նաև գիտական գործունեություն իրականացնող սուբյեկտի մտավոր, ինտելեկտուալ ունակություններով: Իսկապես, մեկը կարող է նկատել գիտության մեջ առկա գեղեցիկը, մյուսը՝ չնկատել, ինչը պայմանավորված է գիտության տվյալ բնագավառում ունեցած գիտելիքներով և սուբյեկտի այլ ունակություններով, որոնք դիտում ենք որպես գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներ: Այդպիսի հատկանիշներ են հետաքրքրասիրությունը, մտքի ճկունությունը, արագությունը և այլն: Գիտական գեղեցիկի մաս են կազմում նաև այն հատկանիշները, որոնք երևան են գալիս օբյեկտի հետ սուբյեկտի երկկողմ հարաբերության ընթացքում և արտահայտում են սուբյեկտի հոգեկանի այս կամ այն կողմը՝ ճանաչումը, գործունեությունը և

այլն: Այդպիսիք են, օրինակ, անսպասելիությունը, ինչն արտահայտում է գիտական օբյեկտի հետ սուբյեկտի հարաբերության ընթացքում նրա սպասումը, օգտակարությունը, ինչն արտահայտում է գիտական օբյեկտի կարևորությունը սուբյեկտի համար և այլն: Դրանք մենք անվանում ենք գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներ:

Գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշները, իրենց հերթին, կարելի է տրոհել մասերի: Գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշների առաջին խումբը կազմում են բնության կազմավորիչ տարրերը՝ կարգը, համաչափությունը, համեմատությունը, ներդաշնակությունը, ռիթմը, կիրառելիությունը, օպտիմալությունը, կայունությունը: Անվանենք այս հատկանիշները գիտական գեղեցիկի կազմավորող հատկանիշներ: Մաթեմատիկայի պարագայում նշված այս հատկանիշները արտահայտում են ինչպես բուն մաթեմատիկայի, այնպես էլ գիտության ու բնության բազմապիսի ոլորտներում մաթեմատիկայի կիրառական օբյեկտների հատկությունները: Որպես գիտական գեղեցիկի կազմավորիչ հատկանիշներ մենք ընդունում ենք կարգը, համաչափությունը, համեմատությունը, ներդաշնակությունը, ռիթմը, կիրառելիությունը, օպտիմալությունը, կայունությունը:

Հատկանիշների երկրորդ խումբը, որ կազմում են հատկությունը, պարզությունը (բարդի հանգեցումը պարզին), տրամաբանական խստությունը, վերաբերում է գիտական լեզվին: Այս հատկանիշները իրենց գեղագիտական գրավչությունը առանձնապես ցայտուն են արտահայտում մաթեմատիկայի և տրամաբանության մեջ: Անվանենք դրանք էլ գիտական գեղեցիկի տրամաբանական հատկանիշներ:

Հատկանիշների երրորդ խումբը կազմում են բազմազանությունների միասնականությունը, ընդհանրականությունը, գիտական օրինաչափության մաթեմատիկական գրառումը, ինքնատիպությունը, հեղափոխական քայլը: Սրանք էլ այն հատկանիշներն են, որոնք միավորում են գիտական օբյեկտները, ինչի պատճառով դրանք անվանենք գիտական գեղեցիկի միավորող հատկանիշներ: Ինչպես տեսնում ենք, մաթեմատիկական, գիտական օրինաչափության մաթեմատիկական գրառումը այստեղ խաղում է առանձնահատուկ դեր: Հարկ է նշել, որ գիտական գեղեցիկի դրսևորման և բացահայտման մեջ մաթեմատիկայի առանձնահատուկ դերը նշել են բոլոր հետազոտողները, սկսած Ֆ. Հատչեսոնից, որոնք մեծ մասամբ գիտական գեղեցիկը ներկայացրել են ուղղակի որպես մաթեմատիկական գեղեցիկ:

Այսպիսով, որպես գիտական կամ մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշներ մենք առանձնացնում ենք.

- Կազմավորող հատկանիշները՝ կարգը, համաչափությունը, համեմատությունը, ներդաշնակությունը, ռիթմը, օպտիմալությունը, կայունությունը, կիրառելիությունը և այլն:
- Միավորող հատկանիշները՝ բազմազանությունների միասնականությունը, ընդհանրականությունը, գիտական օրինաչափության մաթեմատիկական գրառումը, ինքնատիպությունը, հեղափոխական քայլը և այլն:
- Տրամաբանական հատկանիշները՝ հստակությունը, պարզությունը, բարդի հանգեցումը պարզին, տրամաբանական խստությունը և այլն:

Գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշները նույնպես մենք բաժանում ենք երեք խմբի: Առաջին խմբում ներառում ենք այն հատկանիշները, որոնք վերաբերում են սուբյեկտի գործունեության մոտիվացիային. անվանենք դրանք մոտիվային հատկանիշներ: Այդպիսիք են օգտակարությունը, անսպասելիությունը, անկախատեսելիությունը, նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարումը և այլն:

Երկրորդ խմբում ներառում ենք այն հատկանիշները, որոնք վերաբերում են իմացության գործընթացին, նրա բնույթին: Անվանենք դրանք ճանաչողական հատկանիշներ: Գիտական գեղեցիկի ճանաչողական հատկանիշների մեջ մենք ներառում ենք՝ ինտելեկտուալ որոնումը, գտնելը, հայտնագործելը, ճանաչելը, առարկայի էությունը հասկանալը, ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությունը և այլն:

Սուբյեկտիվ հատկանիշների երրորդ խմբում ներառում ենք այն հատկանիշները, որոնք վերաբերում են գործունեությունը իրականացնող սուբյեկտի հոգեկանին. անվանենք դրանք էլ գիտական գեղեցիկի հոգեկան հատկանիշներ: Գիտական գեղեցիկի հոգեկան հատկանիշների մեջ ներառում ենք մտքի, երևակայության, ուշադրության, հիշողության, ընդունակության, կամքի դրական հատկանիշների առկայությունը՝ մտքի խորաթափանցությունը, արագությունը, ճկունությունը, ուշադրության կայունությունը, կամքի ուժը, նպատակասլացությունը և այլն: Այս հատկանիշները կարող են հանդես գալ ինչպես պասիվ, այնպես էլ ակտիվ ձևերով/վիճակներով: Գիտական գեղեցիկի հոգեկան հատկանիշների պասիվ տեսակի մեջ ներառում ենք հոգեկան դրական հատկանիշների առ-

կայությունը, իսկ ակտիվ տեսակի մեջ՝ գործունեության ընթացքում սուբյեկտի դրսևորած դրական հոգեկան որակները: Վերջին դեպքում ինչքան նշանակալից են գործունեության իրականացման մեջ գործադրվող հոգեկան երևույթի մասնակցության համար գործադրվող ջանքերը, այնքան մեծ է գեղագիտականը: Այս տեսակետից հոգեկան ակտիվ հատկանիշների մեջ պետք է ներառել նաև Գ. Բիրկիոֆի և Հ. Այգենկի կողմից դիտարկված՝ առարկայի էություն հասկանալու համար գործադրվող ջանքերը:

Այսպիսով, որպես գիտական կամ մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներ մենք առանձնացնում ենք հետևյալները.

- Մոտիվային հատկանիշներ - օգտակարությունը, անսպասելիությունը, անկախատեսելիությունը, նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարումը և այլն,
- Ճանաչողական հատկանիշներ - ինտելեկտուալ որոնումը, գտնելը, հայտնագործելը, ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությունը, առարկան ճանաչելը, առարկայի էությունը հասկանալը և այլն,
- Հոգեկան հատկանիշներ - սուբյեկտիվ հարաբերության, սուբյեկտի գործունեության ընթացքում սուբյեկտի հոգեկան դրական երևույթների առկայությունը կամ դրսևորումը. առաջիններն անվանենք պասիվ, երկրորդները՝ ակտիվ հատկանիշներ:

Բոլոր հետազոտողները գիտական գեղեցիկի հատկանիշների մեջ նշում են ինչպես օբյեկտիվ, այնպես էլ սուբյեկտիվ հատկանիշներ: Ինքը Ֆ. Հատչեսոնը [220] նշում է միայն երեք հատկանիշ, որոնցից երկուսը՝ բազմազանությունների միասնականությունը և ընդհանրականությունը, օբյեկտիվ (միավորով) հատկանիշներ, մեկը՝ ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությունը, սուբյեկտիվ՝ ճանաչողական հատկանիշ: Երեք հատկանիշ է նշում նաև Վ. Վոլկենշտեյնը [67, 68]. մեկը՝ նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարումը, սուբյեկտիվ՝ մոտիվային և երկուսը՝ բարդի հանգեցումը պարզին և գիտական օրինաչափության մաթեմատիկական գրառումը, օբյեկտիվ, մեկը՝ տրամաբանական, մյուսը՝ միավորող: Գիտական գեղեցիկի հատկանիշների համեմատաբար ամբողջական ցանկ է ներկայացնում Ա. Գուսյեվան [86]: Սակայն նրա առաջարկված դասակարգման մեջ միևնույն խմբում ներառված են օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշներ: Վերջին շրջանի իր [171] աշխատանքում Մ. Ռոդիոնովը որպես գիտական գեղեցիկի հատկանիշներ է առաջադրում

բովանդակության արտաքին պարզության և ներքին խորության հակադրությունը, կարգը, համաչափությունը, ներդաշնակությունը (օբյեկտիվ կազմավորող հատկանիշներ) և ներկայացման անսպասելիությունը (սուբյեկտիվ՝ մոտիվային հատկանիշ):

2. Գիտական գեղեցիկի մոտիվային հատկանիշները

Գիտական գեղեցիկի մոտիվային հատկանիշներ են դիտարկել բազմաթիվ հետազոտողներ: Գեղագիտականի դերը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի մոտիվացիայի հարցում առանձնապես կարևորում են Գ. Ի. Սարանցևի [179] և Մ. Ի. Ռոդիոնովը (տես [170]): Կանգ առնենք գիտական գեղեցիկի մի քանի մոտիվային հատկանիշների վրա:

Նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարումը: Ինչպես գուտ մաթեմատիկական գործունեության մեջ, այնպես էլ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում լայնորեն է դրսևորվում նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտների հաղթահարման գեղագիտական հատկանիշը: Սակայն այդ երկու գործընթացներն իրարից տարբերվում են իրենց նպատակներով և գործունեության իրականացման ձևերով: Եթե առաջինում նպատակը մասնագիտական նյութի հաղթահարումն է և նրա հիման վրա նոր արդյունքների ստացումը, ապա երկրորդում իրականացվում են գուտ կրթական խնդիրներ, և մաթեմատիկական նյութը ծառայում է որպես այդ խնդիրների իրականացման միջոց:

Ինչ վերաբերում է գործունեության իրականացման ձևերին, ապա մաթեմատիկոսը, մասնագետը իր գործունեությունն իրականացնում է մեկուսի, ինքն է առաջադրում նպատակը, վարկածը, նախանշում խնդիրներն ու դրանց լուծման համար իր առջև կանգնած խոչընդոտները, որոնց հաղթահարմանն էլ ուղղում է իր ջանքերը:

Այլ է պատկերը մաթեմատիկական կրթության պարագայում: Այստեղ թեն խոչընդոտներն ավելի պարզ են, սակայն մեծ չեն նաև դրանք հաղթահարողների ունակությունները: Այնուհետև, աշակերտները առաջադրված խոչընդոտները հաղթահարում են միաժամանակ և միասին և ունեն դրանք հաղթահարելու միանգամայն տարբեր ունակություններ: Եվ հաղթահարման այդ գործընթացը առաջադրում է հոգեբանամանկավարժական բազմաբնույթ խնդիրներ, որոնց լուծումը, արդեն ուսուցչից, պահանջում է լուրջ ջանքերի գործադրում:

Եթե ուսուցիչը բոլոր աշակերտների առջև դնում է նույն մաթեմատիկական խնդիրները, ապա, բնականաբար, նրանց զգալի մասը չի կարողանում հաղթահարել առաջացած խոչընդոտները, հուսահատվում է և դուրս է մնում ուսուցման գործընթացից: Բարդ ու դժվարին խոչընդոտների հաղթահարման գեղագիտական հատկանիշը վերաձվում է հակագեղագիտական և հակամանկավարժական մոտեցման: Նման վիճակից խուսափելու համար, առաջին հերթին, պետք է հաշվի առնել սովորողի ունակությունները, նրան ներկայացվող չափորոշչային պահանջները:

Մյուս կողմից, մաթեմատիկայի խնդրագրքերը պետք է պարունակեն չափորոշչային տարբեր պահանջներին և մակարդակներին համապատասխանող առաջադրանքներ: Անհրաժեշտ է հաշվի առնել, որ մաթեմատիկայի թեկուզ և պարզ խնդրի հաջող լուծումը (պարզ խոչընդոտի հաղթահարումը) թույլ աշակերտի համար դժվարին խոչընդոտի հաղթահարում է նշանակում, և կարող է ոգևորել նրան, ներքաշել ուսումնական գործընթացի մեջ:

Մաթեմատիկական թեորեմի ասպացուցումը, խնդրի լուծումը որոշակի, հաճախ՝ բարդ ու դժվարին քայլերի իրականացում ենթադրող նպատակաուղղված գործընթացներ են: Հետևապես, դրանց ուսուցումը պետք է որ ընթանա գեղագիտական որոշակի գրավչությամբ: Դիտարկենք, օրինակ, հետևյալ խնդիրը:

Ունենք համապատասխանաբար p_1 և p_2 տոկոս ոսկի պարունակող երկու համաձուլվածքներ: Ինչպե՞ս դրանցից ստանանք ոսկու p տոկոս պարունակող m քանակությամբ համաձուլվածք:

Ելնելով հանրահաշվական մոտեցման ընդհանուր գեղագիտությունից, որ բխում է բազմազանությունների միասնականության սկզբունքից, ենթադրենք առաջին համաձուլվածքից վերցրել ենք x , երկրորդից՝ y քանակություն: Հաջորդ՝ $x + y = m$ քայլը կարծես դժվարին չէ, բայց պետք է նկատել, որ ինչպես սար բարձրանալիս չի կարելի շարժվել անընդհատ վերելքով, նույնպես և ուսուցման գործընթացքը չի կարելի հանգեցնել միայն դժվարին ու բարդ խոչընդոտների հաղթահարման: Դրանք պետք է զուգորդել նաև պարզ քայլերի հետ, ինչը նախ հանգստացնում է միտքը, և ապա ստացված դրական արդյունքը մեծացնում է վերջնական նպատակին հասնելու հույսը: Խնդրի լուծման ստեղծագործական պահը, որը ինտելեկտուալ որոնման արդյունք է, այն է, որ ոսկու քանակությունը ընդհանուր համաձուլվածքի մեջ նույնքան է, ինչքան տրված երկու համաձուլվածքներում միասին վերցրած: Հանրահաշվորեն ի՞նչ է սա նշանա-

կում. ահա այստեղ է, որ մենք հանդիպում ենք հիմնական խոչընդոտին: Այն հաղթահարելու համար մենք պետք է որոշենք ոսկու քանակությունը առաջին և երկրորդ համաձուլվածքների, ինչպես նաև խառնուրդի մեջ և օգտվենք մեր ինտելեկտուալ որոնման արդյունքից՝ առաջին երկուսի գումարը հավասար պետք է լինի երրորդին: Առաջին երեք քայլերը մեզնից պահանջում են տոկոս հաշվելու կարողություն, իսկ վերջինը՝ գումարման գործողության միավորման մոդելի խմացություն: Այսպիսով, մենք հանգում ենք հավասարումների հետևյալ համակարգին.

$$\frac{xp_1}{100} + \frac{yp_2}{100} = \frac{mp}{100}, \quad x + y = m: \quad (1)$$

Այստեղ արդեն մենք պետք է ունենանք մաթեմատիկական անհրաժեշտ հմտություն՝ գործը ավարտին հասցնելու համար: Ի վերջո մենք կստանանք

$$x = m \frac{p-p_2}{p_1-p_2}, \quad y = m \frac{p-p_1}{p_2-p_1}: \quad (2)$$

Թվում է, թե մենք կատարեցինք մեր առջև դրված առաջադրանքը. հաղթահարելով բարդ ու դժվարին խոչընդոտը, նպատակաուղղված ձևով հասանք դրան: Սովորական աշակերտը կբավարարվի ստացված պատասխանով և այստեղ կանց կառնի: Իսկ որոնելու, գտնելու հակում ունեցող, պրպտող միտքը կշարունակի հետազոտման իր աշխատանքները և կփորձի պարզել նաև, թե ինչպե՞ս է առնչվում p -ն p_1 -ի և p_2 -ի հետ: Անշուշտ այս հարցադրման պատասխանի որոնումը, որպես ինտելեկտուալ որոնում, գեղագիտական գործունեություն է, որի գրավչությունը ավելանում է լուծման համար ևս մեկ բարդ խոչընդոտի հաղթահարման գեղագիտական գրավչությանը:

Հենց սկզբից մենք պարտավոր էինք դիտարկել p_1 -ի և p_2 -ի փոխհարաբերության հարցը և բացառել $p_1=p_2$ դեպքը, քանի որ (1) համակարգը լուծելուց մենք կատարել ենք բաժանում p_1-p_2 տարբերության վրա և պատասխանների հայտարարներում ստացել այդ տարբերությունը: Ահա ստացանք ևս մեկ նրբություն. իսկ ինչպե՞ս վարվել $p_1=p_2$ դեպքում: Բայց սա մեր ճանապարհին ընկած առանձնապես բարդ խոչընդոտ չի և հաղթահարվում է առանց դժվարության. այդ դեպքում երկու համաձուլվածքների ցանկացած քանակությունների միավորման մեջ ոսկու քանակության տոկոսը կմնա անփոփոխ: Հետևաբար խնդիրը այս դեպքում կունենա լուծում, եթե $p = p_1 = p_2$:

Այսպիսով, մենք կարող ենք ենթադրել, որ $p_1 \neq p_2$ և համարել, որ, օրինակ, $p_1 > p_2$: Այդ դեպքում (2) լուծումից, ոչ դժվար մաթեմատիկական հմտություն ցուցաբերելով, կստանանք $p_1 > p > p_2$: Այսինքն՝ ի սկզբանե մեր պայմաններում պետք է տրված լիներ, որ համաձուլվածքների խառնուրդից ստացված նոր համաձուլվածքի մեջ ոսկու տոկոսային պարունակությունը պետք է գտնվեր երկու համաձուլվածքների տոկոսային պարունակությունների միջև:

Թվում է ահա, թե սպառեցինք խնդրի լուծումը: Սակայն որոնող միտքը միշտ գտնում է հետազոտման նոր ուղիներ: Այդպես է նաև այստեղ. առաջանում է, օրինակ, այն հարցը, թե խառնուրդի մեջ ոսկու p տոկոսը ստանալու համար խառնվող համաձուլվածքներից որի՞ց ավելի շատ պետք է վերցնել: Բայց մենք այստեղ կանգ կառնենք, հարցի լուծումը և դրանից ակնակալվող գեղագիտական հաճույքը թողնելով ինտելեկտուալ որոնման հակում ունեցող մեր ընթերցողին:

Անսպասելիությունը, անկանխատեսելիությունը: Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացը թեև չունի օրինաչափությունների և կապերի անսպասելիության և անկանխատեսելիության դրսևորման մաթեմատիկական գիտության հնարավորությունները, մասնավորապես, նրանում բացակայում է դրանց հայտնագործության պահը, սակայն այնտեղ ներգրավված նյութը բավարար է համապատասխան գեղագիտական հատկանիշները ներգրավելու և ուսումնական գործընթացին դրանց միջոցով գեղագիտական գրավչություն հաղորդելու համար: Դիտարկենք մեկ օրինակ:

Երկրաչափության դպրոցական դասընթացից ծանոթ է ուղղի և հարթության ուղղահայացության թեորեմը. հարթության երկու հատվող ուղիղներին ուղղահայաց ուղիղը ուղղահայաց է նաև այդ հարթության կամայական այլ ուղղի: Դասընթացում թեորեմի համադրական երկարաշունչ ապացուցումը կապված է որոշակի տեխնիկական բարդությունների հետ, մինչդեռ այն հեշտությամբ ապացուցվում է սկալյար արտադրյալի բաշխական հատկության կիրառման շնորհիվ: Բսկապես, եթե ուղիղների փոխարեն դիտարկենք դրանց զուգահեռ վեկտորները, ապա երկու ուղիղների ուղղահայացությունը կնշանակի, որ համապատասխան վեկտորների սկալյար արտադրյալը զրո է: Դիցուք x վեկտորը ուղղահայաց է α հարթության u և v վեկտորներին, այսինքն՝ այդ վեկտորների հետ նրա սկալյար արտադրյալները հավասար են զրոյի՝ $xu = 0$, $xv = 0$: Քանի որ u և v վեկտորները զուգահեռ չեն, ապա α հարթության կամայական w

վեկտորի համար կգտնվեն այնպիսի a և b իրական թվեր, որ $w = au + bv$:
Հաշվենք x և w վեկտորների սկալյար արտադրյալը՝

$$xw = x(au + bv) = xau + xbv = a(xu) + b(xv) = 0 + 0 = 0, \quad xw = 0:$$

Այսպիսով, x և w վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի, այսինքն՝ դրանք իրար ուղղահայաց են:

Այս ապացույցի գեղագիտական գրավչությունը առաջին հերթին պայմանավորված է գիտական գեղեցիկի անսպասելիության հատկանիշով:

Դիտարկենք մեկ հանրահաշվական օրինակ՝ խնդրի լուծման անկանխատեսելիության վերաբերյալ: Հայտնի է էվկլիդեսին վերագրվող հետևյալ խնդիրը: Տույց տվեք, որ յուրաքանչյուր կենտ թիվ ինչ-որ երկու հաջորդական թվերի քառակուսիների տարբերություն է (տես [9]):

Առաջին հայացքից դժվար է այստեղ լուծման որևէ խելամիտ մոտեցում առաջարկել: Բայց բավական է նկատել, որ յուրաքանչյուր կենտ թիվ կարելի է գրառել $2n + 1$ տեսքով, որտեղ n -ը կամայական ոչ բացասական ամբողջ թիվ է և, այնուհետև, դիտարկել $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$ հավասարությունը և «նկատել», որ $2n + 1$ արտահայտությունը այդ հավասարության աջ մասի գումարելի է և այն ներկայացնել $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$ տեսքով: Անշուշտ, դժվար է ակնկալել, որ հանրակրթական միջին դպրոցի աշակերտը կկարողանա «գլխի ընկնել» այն, ինչ մենք ենք ցանկանում: Սակայն լուծման և դրա ընկալման պարզությունը առաջարկվող քայլի այդ անկանխատեսելիությանը և ողջ լուծմանը հաղորդում են գեղագիտական մեծ գրավչություն:

Ինչ վերաբերում է հայտնագործություններին, որոնք մաթեմատիկական գործունեության մեջ անսպասելիության և անկանխատեսելիության գեղագիտական հատկանիշների դրսևորման կարևոր աղբյուր են, ապա թեև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում մաթեմատիկական հայտնագործություններ չեն կատարվում, բայց փորձառու ուսուցիչը կարող է գործընթացն այնպես կազմակերպել, որ դասընթացում ընդգրկված շատ փաստեր ոչ թե հաղորդվեն պատրաստի, ավարտուն վիճակում, այլ «հայտնագործվեն» աշակերտների կողմից: Ժամանակին մաթեմատիկայի իմ ուսուցչի նման աշխատանքի արդյունքում, ես վեցերորդ դասարանում «հայտնագործեցի» երկրաչափության թեորեմներից մեկը: Հետո, իհարկե, պարզվեց, որ ես ոչինչ էլ չեմ հայտնագործել. ուղղակի այդ թեորեմը մենք անցանք հաջորդ դասարանում: Բայց այնքան մեծ էր այդ «հայտնագործության» գեղագիտական լիցքը, որ այն իմ մեջ

մնաց ողջ կյանքում՝ իմ հետագա ուսումնական և մասնագիտական գործունեությանը հաղորդելով այնքան անհրաժեշտ ինքնավստահությունը:

Անցյալի մաթեմատիկոսների որոշ հայտնագործություններ նույնպես կարելի է օգտագործել մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում՝ նկատի ունենալով դրանց անսպասելիությունը: Որպես անսպասելիության գեղագիտական հատկանիշի դրսևորման օրինակ [25]-ում մենք բերել ենք զլանի և նրան ներգծված գնդի ու կոնի ծավալների հարաբերության 3:2:1 օրինակը: Աշակերտների համար անսպասելի ու հետաքրքիր կլինի իմանալ, որ այս արտահայտության 3:2 մասը, այսինքն այն, որ գնդի և նրան արտագծված զլանի ծավալները հարաբերում են 2:3 հարաբերությամբ, հայտնաբերել է հնադարի մեծագույն մաթեմատիկոս Արքիմեդը: Եվ Արքիմեդն այնքան է կարևորել իր այդ հայտնագործությունը, որ խնդրել է իր գերեզմանաքարին պատկերել զունդը և նրան արտագծած զլանը: Ուշագրավ և անսպասելի է նաև այն, որ այդ նույն 2:3 հարաբերությունն ունեն նաև գնդի ու նրան արտագծած զլանի մակերևույթների մակերեսները:

Օգտակարությունը: Մենք արդեն նշել ենք գեղեցիկի սուկրատեսյան ըմբռնման հետ մաթեմատիկայի հարազատությունը (տես [25], էջ 10, 15-18): Օգտակարությունը նաև գիտական կամ մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներից մեկն է, որ ծառայում է նաև որպես ուսուցման մոտիվացիայի աղբյուր: Մաթեմատիկայի դպրոցական ծրագրերում ընդգրկված նյութը, դպրոցական մաթեմատիկայի լեզուն, նրա կիրառական ոլորտը ներառում են այնպիսի գիտելիքներ և կարողություններ, առանց որոնց կարիքը մարդը պետք է ունենա ողջ կյանքում: Ասվածը վերաբերում է ոչ միայն կյանքում և հարակից ուսումնական առարկաների մեջ մաթեմատիկայի ամենաբազմազան կիրառություններին, այլև սովորողի հոգևոր ներաշխարհի, նրա աշխարհընկրթմանը և աշխարհայացքի ձևավորմանը:

Ասվածից հետևում է, որ ուսուցման գործընթացում օգտակարության գեղագիտական հատկանիշի դրսևորման համար անհրաժեշտ է մաթեմատիկական նյութի շարադրանքը ուղեկցել նրա բազմազան կիրառություններով և արժեքների ձևավորմամբ:

3. Գիտական գեղեցիկի ճանաչողական հատկանիշները

Ինտելեկտուալ որոնումը, գտնելը, հայտնագործելը: Որոնումը յուրաքանչյուր կենդանի էակի գոյատևման հիմնական բնագոյային դրսևորումներից մեկն է, որ հնարավոր է դարձնում նրա գոյությունը: Ինտելեկտուալ որոնումը որոնման բարձրագույն ձևերից է, որ հատուկ է միայն մարդուն: Բնականաբար, նման որոնման արդյունքը՝ գտնելը, հայտնագործելը ցանկալի է և ուղեկցվում է հուզական ապրումներով և համարվում է գեղեցիկ:

Այս աշխատանքի առաջին մասում մենք անդրադարձանք մարդկային ինտելեկտին, որը տալիս է ինտելեկտուալ որոնման հնարավորություն: Ինտելեկտի էական դրական հատկանիշները՝ հետաքրքրասիրությունը, մտքի խորաթափանցությունը, ճկունությունը և շարժունակությունը, մտածողության ապացուցողականությունը, քննադատականությունը և լայնախոհությունը մարդկային նկարագրի կարևորագույն բաղադրիչներ են, որոնց ձևավորումը և զարգացումը պետք է լինի հանրակրթության հիմնական խնդիրներից մեկը: Նույն խնդիրների շարքում պետք է դասել նաև մտածողության ոչ ճկունության, երևույթների հանդեպ կանխամտածված վերաբերմունքի, զգացական տպավորության գերազանցածության, շարժունային մոտեցումների և ինտելեկտի բացասական այլ հատկանիշների նկատմամբ բացասական վերաբերմունքի ձևավորումը:

Մաթեմատիկան, ամբողջությամբ լինելով ինտելեկտուալ որոնման արդյունք, ստեղծում է գտնելու, հայտնագործելու, ինտելեկտի, նրա դրական հատկանիշների ձևավորման և զարգացման չափազանց լայն հնարավորություններ: Իսկապես, դժվար է գտնել մտքի ճկունությունը ստուգող, ձևավորող և զարգացնող ավելի լավ միջոց, քան մաթեմատիկայի հետաքրքրաշարժ-տրամաբանական խնդիրներն են: Մաթեմատիկական առանձին հասկացություններում, թեորեմներում, դրանց ապացուցումներում, խնդիրների լուծումներում դրսևորվում է նաև մտքի խորաթափանցությունը և մտածողության ապացուցողականությունը:

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը պետք է հագեցված լինի ինտելեկտուալ որոնման, գտնելու, հայտնագործելու գործողություններով: Չխոսելով այստեղ խնդիրների ինքնուրույն լուծման անհրաժեշտության մասին, նշենք, որ այս ճանապարհին առանձին դեպքերում կարելի է հասկացությունների և թեորեմների ձևակերպումներին ու թեորեմ-

ների ապացուցումներին նույնպես հասնել աշակերտների ուժերով՝ որպես ինտելեկտուալ որոնման արդյունք:

Ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությունը: Ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությունը գիտական գեղեցիկի առաջին սուբյեկտիվ հատկանիշն է. այն առաջադրել է Ֆ. Հատչեսոնը: Այս գրքի առաջին մասում մենք անդրադարձանք մաթեմատիկական գործունեության մեջ գեղագիտական այս հատկանիշի կարևոր դերին (տես [25], էջ 71-73): Այն մեծ կիրառություն ունի նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Այդ գործընթացը թեև տարբերվում է զուտ մաթեմատիկական գործունեությունից, սակայն նրանում ներառված մաթեմատիկական նյութը նույնպես աչքի է ընկնում ոչ ակնհայտ ճշմարտություններով, որոնց իմացումը աշակերտին կարող է պատճառել որոշակի գեղագիտական հաճույք: Զուտ մաթեմատիկական գործունեության մեջ իմանալու գեղագիտական այդ հաճույքը հիմնականում պայմանավորված է մաթեմատիկայի ընդհանուր ճարտարապետական կառույցի գեղեցկության բացահայտմամբ: Եվ թեև մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի մաթեմատիկական մասը մաթեմատիկայի ընդհանուր ճարտարապետության մի չնչին հատվածն է և չի արտահայտում նրա գեղագիտական ողջ հմայքը, այնուամենայնիվ, դասընթացն ամբողջությամբ՝ իր կիրառական ուղղվածության, խնդիրների համակարգի և ուսուցման գործընթացի ընձեռնած հնարավորությունների շնորհիվ ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությունը դարձնում է գեղեցիկի տեսակետից ոչ պակաս նշանակալից: Այստեղ սովորողը կարող է ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացության արդյունքը ոչ միայն կիրառել խնդիրների լուծման ընթացքում, այլև այն դարձնել պարտքի կատարման, փոխօգնության իրականացման, մտավոր հաղորդակցման կարևոր լծակ, ինչը ուրախության և հաճույքի լրացուցիչ աղբյուր է:

Ուսուցման գործընթացում ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացության գեղագիտական հատկանիշը մեծ մասամբ դրսևորվում է ինտելեկտուալ որոնման, իմանալու, գտնելու, հայտնագործելու հատկանիշների հետ զուգորդված: Եվ աշակերտի՝ առաջադրված մաթեմատիկական խնդրի պատասխանը գտնելու ուղղությամբ ինքնամոռաց աշխատանքը հաճախ բացատրվում է ոչ միայն ուսուցչի հանձնարարությունը կատարելու պատասխանատվությամբ, այլ գեղագիտական այս հատկանիշներով: Ավելացնենք, որ այդ հատկանիշների ներգործությունը, ուսուցման գործըն-

թացի գեղագիտական գրավչությունը զգալիորեն մեծանում է, եթե գործ-
ընթացը ուղեկցվում է նաև ստեղծագործական տարրով:

4. Գիտական գեղեցիկի հոգեկան հատկանիշները

Ինչպես նշվեց վերևում, գիտական գեղեցիկի պասիվ հոգեկան հատ-
կանիշների մեջ ներառվում են գործունեությունը իրականացնող սուբ-
յեկտի հոգեկանի դրական որակները, որոնց մենք կանդադառնանք
երկրորդ գլխում: Այստեղ դիտարկենք գիտական գեղեցիկի ակտիվ հոգե-
կան հատկանիշներից՝ ջանքերը, որ գործադրվում են առարկայի ճանա-
չողության ընթացքում:

Ջանքերը: Սովորաբար մաթեմատիկայի ուսումնական նյութի յուրա-
ցումը սովորողից պահանջում է որոշակի ջանքերի գործադրում: Դա
վերաբերում է դասի բոլոր փուլերին և նաև տնային հանձնարարություն-
ների կատարմանը: Բոլորի կողմից ընդունվում է մաթեմատիկական
գործունեության ընթացքում սովորողի կատարած աշխատանքի, դժվա-
րությունների հաղթահարմանն ուղղված ջանքերի ազդեցությունը ուսու-
ցանվող նյութի գեղագիտական գրավչության վրա: Սակայն, ինչպես ար-
դեն նշեցինք, մոտեցումները տարբեր են, հաճախ՝ տրամագծորեն հակա-
ռակ. Գ. Բիրկհոֆը կարծում է, որ այդ ազդեցությունը հակադարձ համե-
մատական է, իսկ Հ. Այզենկի կարծիքով այն ուղիղ համեմատական է
նյութի գեղագիտական գրավչությանը:

Իրականում, այդ ազդեցության գրավչությունը կախված է դասա-
վանդման կազմակերպումից: Եթե տեսական նյութի յուրացումը կամ
առանձին խնդրի լուծումը աշակերտի ուժերից վեր են, ապա նրա ջան-
քերը հանգեցնում են միայն սերտողական ուսուցման, և վանում են մաթե-
մատիկայից, և այստեղ առկա է Գ. Բիրկհոֆի մոտեցումը: Իսկ եթե այդ
ջանքերը նպատակաուղղվում են և հանգեցնում են նյութի ըմբռնմանը,
ապա գործում է Հ. Այզենկի մոտեցումը: Ավելին, վերջին դեպքում նման
ջանքերը մեկ-երկու անգամ գործադրելուց հետո դառնում են ավելի
համառ և նպատակաուղղված, սովորողի մոտ բացի գեղագիտական
որակներից, ձևավորում են նաև կամային դրական հատկանիշներ:

Փորձեք աշակերտներին առաջարկել որևէ հետաքրքրաշարժ խնդիր:
Դրա էությունը ըմբռնող աշակերտը չի թողնի, որ դուք ասեք խնդրի
լուծումը կամ պատասխանը: Ինչո՞ւ: Որովհետև լուծումը, որոնումը,

գտնելը և առաջին հերթին դրա համար գործադրվող ջանքերը նրան հաճույք են պատճառում, այսինքն՝ ջանքերի գործադրման գործընթացը ունի գեղագիտական գրավչություն: Այստեղ, անշուշտ, գործում է նաև ինտելեկտուալ որոնման գեղագիտական հատկանիշը: Սակայն, առանց գործադրվող լուրջ ջանքերի, ինտելեկտուալ որոնումը չի կարող ստեղծել գեղագիտական նշանակալից գրավչություն: Իսկապես, սովորաբար առաջարկվող հետաքրքրաշարժ խնդիրը լուծելուց հետո աշակերտը պահանջում է տալ նոր խնդիր, և եթե այդ խնդիրը շատ է նման նախորդին և լուծման համար լրացուցիչ ջանքեր չի պահանջում, այն մեծ հետաքրքրություն չի առաջացնում:

Հետաքրքիր է նաև ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացության և դրա համար գործադրվող ջանքերի չափի գեղագիտական հատկանիշների համեմատությունը: Դրանցից առաջինը մղում է առաջարկվող հետաքրքրաշարժ խնդրի լուծման իմացությանը, երկրորդը՝ դրա գտնելուն, հայտնաբերմանը: Առաջինը պասիվ է, հայեցողական, բավարարում է միայն սովորողի հետաքրքրությունը: Երկրորդն ակտիվ է, այն ներգրավում, շարժման մեջ է դնում հիշողությունը, երևակայությունը, մտածողությունը, կամային և հոգեկան այլ որակներ: Հետևաբար, ուսուցիչը պետք է հեշտությամբ չբավարարի ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացության նկատմամբ աշակերտի գեղագիտական պահանջը և աշխատի գործընթացի մեջ ներգրավել գործադրվող ջանքերի չափի՝ ավելի արդյունավետ գեղագիտությունը:

Այստեղ նույնպես գործընթացի գեղագիտական գրավչությունը ավելի մեծ է, եթե իմացությունը կրում է ստեղծագործական բնույթ, երբ սովորողը ինքն է մասնակցում ճշմարտության հայտնագործման գործընթացին, ջանքեր է թափում և կատարում է այդ հայտնագործությունը:

§4. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԳԵՂԵՑԻԿԻ ՕԲՅԵԿՏԻՎ ՏԵՄԱՆԿՅՈՒՆԸ

Գեղեցիկը այն տեղն է, որտեղ աչքն
է հանգստանում:

Իոսիֆ Բրոդսկի

Այս աշխատանքի առաջին մասում մենք արդեն ծանոթացել ենք գիտական կամ մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշների հետ (տես [25], էջ 43-63): Հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում առկա են այնտեղ դիտարկված բոլոր հատկանիշները: Մակայն այդ դասընթացը էականորոն տարբերվում է մաթեմատիկայի ընդհանուր ճարտարապետական կառույցից: Այստեղ ընդգրկվում են միայն այդ կառույցի առանձին հատվածներ, միաժամանակ, հանդես են գալիս նոր օբյեկտներ, որոնք հիմնականում կապված են մաթեմատիկայի կիրառությունների հետ, և կազմում են մաթեմատիկայի կիրառական ֆոնը: Այդ ֆոնը, իր հերթին, նոր երանգներ է հաղորդում մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշներին: Անհրաժեշտ է նկատի ունենալ նաև, որ այդ հատկանիշները մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում ունեն իրենց յուրահատկությունները, ինչը կապված է ուսուցման գործընթացի, դասավանդման մեթոդների, սովորողների տարիքային առանձնահատկությունների և այլ գործոնների հետ:

1. Կազմավորող հատկանիշները

Կարգը: Ինչպես ողջ մաթեմատիկայում, այնպես էլ նրա դպրոցական դասընթացում կարգը խաղում է առանցքային դեր և հանդիսանում է այդ կառույցների գեղագիտական գրավչության կարևոր աղբյուր: Կարգը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի կազմավորման հիմնական սկզբունքներից մեկն է: Նյութի շարադրման հաջորդելիությունը, դասընթացի կիրառական ֆոնի կարգավորումը՝ համապատասխանեցումը մաթեմատիկական նյութի հետ, մաթեմատիկական և կիրառական օբյեկտների բնութագրումը կարգի առնչության միջոցով, այս և նմանատիպ այլ գործընթացներ ցույց են տալիս այն բացառիկ դերը, որ խաղում է կարգը մա-

թեմատիկայի դպրոցական դասընթացում և նրա ուսուցման գործընթացում: Միաժամանակ, մաթեմատիկայի դասընթացում և ուսուցման գործընթացում կարգի գործառույթների իրականացումն ուղեկցվում է մաթեմատիկական գեղեցիկի օրյեկտիվ և սուբյեկտիվ այլ հատկանիշներով, նրա արտաքին և ներքին դրսևորումներով:

Ուսուցման երկարամյա գործընթացում կատարելով իր առաջին քայլերը՝ սովորողը մաթեմատիկայի ուսուցման հենց սկզբում հնարավորություն ունի նկատելու, որ, ինչպես նշում է Նորբերտ Վինները, «մաթեմատիկան կարգ է մտցնում մեզ շրջապատող քառսի մեջ»: Իսկապես, «աջ» և «ձախ», «վերև» և «ներքև», «մեծ» և «փոքր» հասկացություններն արդեն կարգը և նրա գեղագիտական հատկանիշն արտահայտող հիանալի օրինակներ են, որոնց սովորողը ծանոթանում է հենց առաջին դասարանում: Իսկ բնական թվերի օգտագործումը: Այստեղ հաշվման հետ գուզընթաց դրսևորվում է բնական թվերի համարակալման գործառույթը, ինչն աչքի է ընկնում նաև օգտակարության, կիրառելիության և մաթեմատիկական գեղեցիկի այլ օրյեկտիվ հատկանիշներով: Հետագայում, բնական թվերի կարգավորման հատկությունը տարածվում է ամբողջ, ռացիոնալ և իրական թվերի բազմությունների վրա, օգտագործվում թվային ուղղի ներմուծման, անվանական թվերի կարգավորման մեջ, և վերջինիս միջոցով ճանապարհ է հարթում դեպի մաթեմատիկայի բազմապիսի կիրառություններ: Բոլոր այս գործընթացներն ուղեկցվում են գեղեցիկի լիարժեք դրսևորումներով, որոնք արտահայտվում են նաև բազմազանությունների միասնության և ընդհանրականության գեղագիտական հատկանիշներով:

Կարգը մաթեմատիկայի ողջ դասընթացում հանդես է գալիս բուն կարգի և հավասարության ու անհավասարության առնչությունների տեսքով: Սա վերաբերում է ուսումնական նյութի հերթականությանը՝ ըստ կախվածության դրանց դասավորվածությանը, առանձին նյութերի շրջանակներում հասկացությունների փոխկապակցվածությանը, ապացուցումների իրականացմանը և այլն:

Այսպես, օրինակ, երբ մենք համատեղ, այսինքն՝ միևնույն բազմության վրա, ուսումնասիրում ենք տարբեր գործողություններ և առնչություններ, ապա կարգը, կարգի հաստատումը պահանջում է այդ գործողությունների և առնչությունների միջև որոշակի «համաձայնության» առկայություն: Կարգը պահանջում է, որ, օրինակ, բնական թվերի բազմության վրա գումարման և բազմապատկման գործողությունների համատեղ դիտարկման դեպքում դրանց միջև տեղի ունենա նշված «համաձայ-

նությունը», ինչն արտահայտվում է գումարման նկատմամբ բազմապատկման բաշխական օրենքով: Եվ այս մոտեցումը՝ կարգի նման հաստատումը ընդհանուր կառուցողական մոտեցում է մաթեմատիկական բոլոր ստրուկտուրաների համար: Նման ձևով կարգի ներմուծմանը լրացուցիչ գեղագիտական գրավչություն է հաղորդում այն, որ դրանց միջոցով հաստատվում են նաև համապատասխան կարգեր այլ գործողությունների միջև: Օրինակ, այն բանից, որ ամբողջ թվերի գումարման և բազմապատկման գործողությունները համաձայնեցված են բաշխական օրենքով, հետևում է, որ բաշխական օրենքով են կապված նաև հանման և բազմապատկման գործողությունները:

Թվային բազմությունների վրա սահմանվում է նաև գումարման, բազմապատկման գործողությունների և փոքր լինելու առնչության միջև համաձայնություն հետևյալ տեսքով. կամայական a, b, c ամբողջ թվերի համար. եթե $a < b$, ապա $a + c < b + c$, և եթե նաև $0 < c$, ապա $ac < bc$: Այսպես են համաձայնեցված միմյանց հետ նաև գումարման և բազմապատկման գործողություններն ու փոքր լինելու առնչությունը ռացիոնալ և իրական թվերի բազմությունների վրա:

Կարգավորվածության նշված գործընթացը կարելի է շարունակել նաև կոմպլեքս թվերի համար: Կարելի է, օրինակ, կոմպլեքս թվերը համեմատել ըստ իրական մասերի և կեղծ մասերի գործակիցների, ասենք՝

$$a + bi < c + di \Leftrightarrow a < c \text{ կամ } a = c \text{ և } b < d, a, b, c, d \in \mathbb{R}:$$

Կոմպլեքս թվերի կարգավորվածությունը կարելի է կատարել նաև ըստ մոդուլի և արգումենտի կամ բազմաթիվ այլ եղանակներով: Սակայն հետաքրքիրն այն է, որ ինչպես էլ սահմանենք կարգը, կոմպլեքս թվերի գումարման և բազմապատկման գործողությունների հետ վերևում նշված նրա կապը չի կարող իրականացվել:

Իսկապես, դիցուք դա հնարավոր է եղել: Համեմատենք i և 0 կոմպլեքս թվերը: Հնարավոր է երկու դեպք. $0 < i$ կամ $i < 0$: Առաջին դեպքում կստանանք $0 - i < i - i$ կամ $0 < -1$: Վերջին անհավասարության երկու մասերին գումարելով 1 ՝ կստանանք $1 < 0$, իսկ նրա երկու մասերը բազմապատկելով $0 - i$ -ից մեծ -1 թվով՝ կստանանք $-1 < 0$: Ստացվեց հակասություն $0 < -1$ անհավասարության հետ: Դժվար չէ համոզվել, որ հակասության է հանգեցնում նաև $i < 0$ դեպքը: Հետևաբար, կոմպլեքս թվերի բազմության մեջ, ինչպես էլ ներմուծենք փոքր լինելու առնչությունը, անհնար կլինի այն համաձայնեցնել գումարման և բազմապատկման գործողությունների

հետ: Այդ պատճառով կոմպլեքս թվերի բազմության վրա կարգ չի մտցվում:

Կատարված դիտարկման գեղագիտական գրավչությունը պայմանավորված է նաև գիտական գեղեցիկի անսպասելիության և անկանխատեսելիության հատկանիշներով: Մինևույն ժամանակ այն ցույց է տալիս, որ բազմազանությունների միասնականությունը չի կարող անսահմանափակ լինել. այն կարող է տարածվել միայն առարկաների որոշակի խմբի վրա:

Համաչափությունը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում: Այս աշխատանքի առաջին մասում մենք տեսանք, որ համաչափությունը մեծ դեր ունի բնության առարկաների և երևույթների պատկերման մեջ, ավելին՝ այն բնության կազմավորման սկզբունքներից մեկն է: Մինևույն ժամանակ, այն նաև գեղեցիկի կարևոր բաղադրիչ է և, ուրեմն, նրա իմացությունը օգնում է հասկանալու ինչպես բնության օրինաչափությունները, այնպես էլ ընկալելու գեղեցիկը: Այդ պատճառով համաչափությունը մեծ կիրառություն ունի ինչպես ֆիզիկայում, քիմիայում, բյուրեղագիտության և այլ բնական գիտությունների մեջ, այնպես էլ ճարտարապետության, կերպարվեստի, երաժշտության, խաչքարագործության, պարի և արվեստի այլ ոլորտներում: Մենք տեսանք, որ համաչափությունը նաև մաթեմատիկայի կարևոր հասկացություններից է և, բնականաբար, նրա ուսումնասիրության առարկա: Լայն իմաստով մաթեմատիկայում համաչափությունը երկտեղ առնչություն է, որն օժտված է համաչափության հատկությամբ, այսինքն, եթե մի առարկա երկրորդի հետ մտնում է այդ առնչության մեջ, ապա երկրորդն էլ առաջինի հետ է մտնում նույն առնչության մեջ: Օրինակ, ազգական լինելու, մինևույն երկրի քաղաքացի լինելու, նույն ընտանիքի անդամը լինելու, նույն դպրոցում սովորելու առնչությունները համաչափություններ են, իսկ սիրելու, ատելու, ծնող լինելու առնչությունները համաչափություններ չեն: Համաչափություններ են նաև թվերի, արտահայտությունների, պատկերների ու մարմինների հավասարության, ինչպես նաև պատկերների նմանության առնչությունները: Իսկ թվերի անհավասարության կամ ոչ խիստ անհավասարության առնչությունները համաչափություններ չեն: Նկատի ունենալով հավասարության հասկացության հիմնարար նշանակությունը մաթեմատիկայի և նրա դպրոցական դասընթացի համար (տես էջ 299-303), ինչպես նաև նմանության դերը երկրաչափության դասընթացում, կարող ենք վստահաբար եզրակացնել, որ լայն իմաստով համաչափությունը նաև մաթե-

մատիկայի ու նրա դպրոցական դասընթացի կազմավորիչ գաղափարներից մեկն է:

Նեղ իմաստով կամ առավել տարածված մոտեցմամբ համաչափությունը (սիմետրիան) բազմության այնպիսի ձևափոխությունն է, որը պահպանում է այդ բազմության տարրերի միջև դիտարկվող զանազան հատկանիշներ: Երկրաչափության մեջ նման հատկանիշներ կարող են լինել նմանությունը, երկարությունը, պատկերների և մարմինների համընկնելիությունը և այլն: Հանրահաշվում որպես այդպիսիք կարող են հանդես գալ հանրահաշվական ստրուկտուրայի գործողությունները, ենթաստրուկտուրայի տարրերի համընկնելիությունը, բազմանդամի արմատները և այլն (տես [25], էջ 103):

Հանրակրթական դպրոցի երկրաչափության դասընթացում որպես համաչափություն դիտարկվում են հարթության կամ տարածության այն շարժումները, որոնց ընթացքում այդ պատկերները կամ մարմինները ձևափոխվում են իրենք իրենց: Եվ հենց համաչափության այս տեսակն է, որ արվեստում նույնպես ընկալվում է որպես համաչափություն և ունի ավելի մեծ գեղագիտական գրավչություն, գեղեցիկի ձևավորման ավելի մեծ ներուժ:

Որպես այդպիսի համաչափություններ երկրաչափության դասընթացում դիտարկվում են կետի և ուղղի նկատմամբ համաչափությունները, որոնց միջոցով կառուցվում են ուղղանկյան, շեղանկյան, քառակուսու և որոշ այլ պատկերների համաչափությունները:

Հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում երկրաչափական համաչափությունները կիրառվում են ֆունկցիաների գրաֆիկների կառուցման ընթացքում: Այստեղ սակայն կիրառվում են նաև զուտ հանրահաշվական բնույթի համաչափություններ, որոնք կապված են բազմանդամների տեսքի, փոփոխականների, արմատների միջև որոշակի առնչությունների իրականացման հետ:

Պետք է նկատել սակայն, որ անցյալի և ներկայիս հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացներում լիարժեք չի օգտագործվում համաչափության ուսումնական և դաստիարակչական (արժեքների ձևավորման իմաստով) նշանակությունը: Այնինչ նմանատիպ հնարավորությունները չափազանց մեծ են: Այստեղ բավարարվենք այս ուղղությամբ կատարելով մի քանի ընդհանրական դիտարկումներ:

1) Հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում համաչափության հասկացության ներկայացվածության շրջանակների ընդլայ-

նումը և խորացումը կնպաստի ոչ միայն բնության մեջ, այն ուսումնասիրող գիտություններում, այլև արվեստի ամենատարբեր ոլորտներում ճանաչողության ընդհանուր գործընթացի խորացմանը, հետևապես, նաև մաթեմատիկայի կիրառական ֆոնի ընդլայնմանը:

2) Համաչափության հասկացությունը ունի մաթեմատիկայի դասընթացի՝ առաջինից մինչև վերջին դասարանների նյութերում ընդգրկվելու տեսական և կիրառական լայն ու բազմապիսի հնարավորություններ:

3) Համաչափության գաղափարի լուրջ ներկայությունը մաթեմատիկայի դպրոցական ողջ դասընթացին կարող է ընձեռել միասնականության և գեղագիտական գրավչության լրացուցիչ հնարավորություններ, մեծացնել սովորողների հետաքրքրությունը մաթեմատիկայի ուսուցման նկատմամբ:

4) Համաչափությունը կարող է հանդես գալ որպես ինտեգրող գաղափար հանրակրթական դպրոցի մի շարք ուսումնական առարկաների համար: Ինտեգրող հիմնական առարկան պետք է լինի մաթեմատիկան, ինտեգրման շրջանակի մեջ ներառելով ֆիզիկան, քիմիան, բնագիտությունը, կենսաբանությունը, արվեստը, գրականությունը: [225] աշխատանքում, օրինակ, դիտարկված են ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի միջառարկայական կապերը համաչափության համատեքստում: Հասկանալի է, որ համաչափության մաթեմատիկական հասկացությունը, նշված ոլորտներում նրա ամենաբազմազան կիրառությունները այնքան ընդարձակ են, որ անիմաստ կլինի խոսել նյութի շատ թե քիչ ամբողջական սպառման մասին: Սակայն կրթական յուրաքանչյուր աստիճանի համար կարելի է գտնել նշված բոլոր ոլորտների ինտեգրման համար համապատասխան նյութ:

5) Համաչափության գաղափարի ինտեգրված ուսուցումը կարող է նպաստել սովորողների աշխարհընկալմանը, աշխարահայացքի ձևավորմանը:

Համեմատությունը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում: Համեմատությունը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդես է գալիս և՛ որպես ուսումնասիրության առարկա, և՛ որպես ուսումնասիրության մեթոդ: Հաջորդ գլխում մենք կանդրադառնանք հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում համեմատության գիտական հետազոտության մեթոդի գեղագիտական նշանակությանը: Այստեղ համառոտակի կանգ առնենք առաջին մոտեցման վրա:

Ինչպես համաչափությունը, համեմատությունը նույնպես մեծ դեր ունի բնության, նրանում գեղեցիկի կազմավորման գործում: Այս հարցը ուսում-

նասիրված է համակողմանիորեն ու բազմաթիվ հետազոտողների կողմից: Մասնավորապես, նման գրականության ընդարձակ ցանկ կարելի է գտնել [192] աշխատանքում: [25]-ում մենք նույնպես անդրադարձել ենք այդ խնդրին:

Սակայն, եթե համաչափության գաղափարը շատ թե քիչ դիտարկվում է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում, ապա համեմատության հասկացությունը՝ իր գեղագիտական նշանակությամբ կամ ոսկե հատման ռացիոնալ և իռացիոնալ ընկալումներով, ընդհանրապես դուրս է մնում հանրակրթությունից: Այնինչ, համեմատության այս ընկալումը նույնպես հանրակրթության որոշ բնագիտական առարկաների և մաթեմատիկայի ուսումնական ծրագրերում տեղ գրավելու լուրջ նախադրյալներ ունի: Բացի կիրառական լայն հնարավորություններից, այստեղ առկա է նաև այդ հասկացության գեղագիտական մեծ ներուժը: Իսկապես, ինչո՞ւ, ե՞րբ է գեղեցիկ մարդու դեմքը, ինչո՞ւ է արևածաղիկը կամ որոշ այլ բույսեր աճում անհասկանալի ոլորապտույտներով, ինչո՞ւ է ծառի բունը կազմավորվում ինչ-որ գծավոր շերտերով և ի՞նչ շերտեր են դրանք, ինչպե՞ս, ի՞նչ հեռավորությամբ են կազմավորվում, բույսերի (օրինակ, ճարձատուկի) էլուստները նրա ճյուղերի վրա և այլն, և այլն: Մրանք հարցադրումներ են, որոնց պատասխանը տրվում են բնությունը հետազոտող գիտությունների կողմից: Միևնույն ժամանակ, դրանց պատասխանները զարմանալիորեն ստացվում են գեղեցիկի անմիջական մասնակցությամբ, գեղեցիկ, որն ունի ինչպես ռացիոնալ, այնպես էլ իռացիոնալ բնույթ: Դրանցից երկրորդը առաջանում է մասերի մի զարմանալի համեմատությամբ, ու անցյալի մեծերի կողմից ստացել է «ոսկե հատում» անվանումը:

Մենք արդեն գիտենք, որ ոսկե հատումը առաջանում է հատվածների որոշակի հարաբերության արդյունքում: Կատարված են բազմապիսի ուսումնասիրություններ, որոնք վերաբերում են ոսկե հատման ինչպես մաթեմատիկային, այնպես էլ բնության ամենատարբեր երևույթների մեջ և արվեստի տարբեր բնագավառումներում նրա կիրառություններին: Այդ բոլորը հիմք են տալիս պնդելու, որ ի դեմս ոսկե հատման, հանրակրթության սովորողները հնարավորություն ունեն գտնելու գեղագիտական մեծ ներուժով և կիրառական լայն դաշտ ապահովող մի լայնածավալ նյութ: Եվ չնայած այս բոլորին, ոսկե հատումը առ այսօր դուրս է մնացել հանրակրթությունից: Նույնը վերաբերում է նաև Ֆիբոնաչիի թվերին՝ չնայած բնության և գիտության մեջ դրանց լայն կիրառությանը (տես [25], [66], [192]):

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի ներդաշնակությունը: Ներդաշնակությունը նույնպես բնության և մաթեմատիկայի կազմավորման հիմնական սկզբունքներից է: Մի կողմից այն արտահայտվում է բնության և մաթեմատիկայի միջև աննախադեպ համաձայնեցվածությամբ: Մաթեմատիկայի մտային-վերացական օբյեկտները նկարագրում են բնության առարկաները, երևույթներն ու օրինաչափությունները: Մյուս կողմից այդ մտային-վերացական պատկերները իրար հետ շաղկապվում են առաջին հայացքից անտեսանելի կապերով և իրենց այդ միասնությամբ կազմում ճարտարապետական մի հիասքանչ կառույց, որին դեռևս անտիկ հույները տվել են «մաթեմատիկա» նվիրական անվանումը: Այդ կառույցը՝ որպես մասերի ներքին միասնություն և ամբողջի մեջ դրանց միավորում, համահունչ է ներդաշնակության հունական ընդհանրական ըմբռնմանը: Մաթեմատիկական կառույցի մասերի կամ շինությունների՝ մաթեմատիկայի առանձին բնագավառների ներքին միասնությունը ավելի քան ակնառու է: Այդ մասերը ունեն նաև մեկ ամբողջական կառույցի մեջ միավորվելու միտում, ինչն արտահայտվում է դրանց փոխադարձ ներթափանցումներով, ուսումնասիրության մեթոդների ընդհանրություններով, մաթեմատիկական լեզվի միասնականությամբ և այլ հատկանիշներով:

Սակայն դպրոցական մաթեմատիկան ամեննին էլ նշված այդ «Մաթեմատիկա» գիտությունը չէ և ոչ էլ նրա մի մասը կամ հատվածն է: Մաթեմատիկայի և նրա դպրոցական դասընթացի փոխկապակցվածության խնդիրը մենք համակողմանիորեն կքննարկենք առաջիկայում: Այստեղ նշենք միայն, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացը, ելնելով հանրակրթական իր խնդիրներից, ներառում է ինչպես մաթեմատիկայի առանձին բաժիններ (բուն մաթեմատիկան), այնպես էլ դրանց կիրառությունների վերաբերյալ ամենաբազմազան նյութեր գիտության, տեխնիկայի, տնտեսության, սպորտի և մարդկային կենսագործունեության այլ բնագավառներից:

Բուն մաթեմատիկական նյութերը կազմում են մաթեմատիկայի դասընթացի հենքը: Դասընթացի ներդաշնակության առաջին հատկանիշը պետք է լինի մաթեմատիկական այդ նյութերի ներքին միասնությունը, ինչը մաթեմատիկայի մեթոդիկայում բնորոշվում է «ներառարկայական կապեր» եզրույթով: Ավելացնենք, որ մասերի այդ միասնությունը, հանդիսանալով բազմազանությունների միասնականության գիտական գիտական գեղեցիկի հատկանիշի մասնավոր դրսևորում, նույնպես նպաստում

է դասընթացի ընդհանուր ճարտարապետության գեղագիտական գրավչության բարձրացմանը:

Ներդաշնակության այս ընդհանուր սկզբունքը պետք է գործի առաջին հերթին մաթեմատիկայի բնագավառի տարբեր ուսումնական առարկաների դասընթացների միջև: Նմանօրինակ ներդաշնակության հաստատման լավագույն միջոց է Ռ. Դեկարտի ստեղծած կոորդինատական համակարգի գաղափարը: Այն հնարավորություն է ընձեռում հանրահաշվի և մաթանալիզի հասկացությունները ներկայացնել երկրաչափական պատկերների տեսքով և հակառակը: Այստեղ կետը դառնում է թվագույգ, ուղիղը՝ երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարում, շրջանագիծը՝ երկու անհայտով քառակուսային հավասարման հատուկ տեսակ և այլն: Իրենց հերթին, ֆունկցիայի ածանցելիությունը նշանակում է նրա գրաֆիկի ողորկություն, ածանցյալի դրական լինելը՝ ֆունկցիայի աճում, երկրորդ ածանցյալի դրական լինելը՝ գոգավորություն և այլն: Եվ Ռ. Դեկարտի հայտնաբերած այս ներդաշնակությունը հնարավորություն է տալիս երկրաչափության, հանրահաշվի և մաթանալիզի բնագավառներից յուրաքանչյուրում հետազոտությունները իրականացնելիս օգտվել մյուսի հնարավորություններից. երկրաչափությունը, օրինակ, տալիս է պատկերման դիտողական հնարավորություններ, հանրահաշիվը և մաթանալիզը՝ հետազոտման մեթոդներ ու եղանակներ և այլն:

Ներդաշնակությունը պետք է առկա լինի նաև մաթեմատիկայի բանագլխի առանձին ուսումնական առարկաներում: Երկրաչափության պարագայում այն դրսևորվում է դասընթացի աքսիոմատիկ կառուցվածքում՝ թեորեմների ապացուցման դեդուկտիվ եղանակներում, դրանց փոխկապակցվածությամբ, նյութի զարգացման աստիճանականությամբ և հաջորդելիությամբ: Այս ամենը թույլ է տալիս երկրաչափական դասընթացը ներկայացնել որպես մասերի միասնականությամբ, հաջորդը նախորդի վրա խարսխված, հորիզոնական և ուղղաձիգ կապերով միահյուսված մեկ ամբողջություն, որի ճարտարապետության հիմնական մոտիվը ներդաշնակությունն է:

Միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացը նույնպես ունի աքսիոմատիկ, դեդուկտիվ կառուցման միջոցով ներդաշնակության արտահայտման լիակատար հնարավորություններ: Այդ հնարավորությունները իրականացվել են, օրինակ, [9]-[11] դասագրքերում: Այդտեղ ճարտարապետական կառույցի հենասյուները հանրահաշվական գործողություններն են, հավասարության, անհավասարության և որոշ այլ առնչություններ,

որոնց կապող հեծանները ներկայացվում են դրանց կապերն արտահայտող բազմազան հատկությունների՝ հավասարությունների, անհավասարությունների և այլ բանաձևերի տեսքով, որոնք դասընթացի և նրա առանձին հատվածների ներդաշնակության արտահայտություններ են:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի ներդաշնակության հաջորդ աղբյուրը մաթեմատիկայի կիրառական ոլորտն է կամ կիրառական ֆոնը, ինչն էլ դասավանդման մեթոդիկայում բնորոշվում է «միջառարկայական կապեր» եզրույթով: Դասընթացի այս բաղադրիչը ավելի բնորոշ է հանրահաշվի դպրոցական դասընթացին: Նշենք, որ այստեղ էլ դասընթացին լրացուցիչ գեղագիտական գրավչություն են հաղորդում նախ առաջին հայացքից իրարից բավականին հեռու թվացող մաթեմատիկայի տեսական ու երևակայական և կիրառական ու տեսանելի նյութերի ընդհանրությունը և միասնականությունը, և ապա՝ երևակայական այդ նյութերի կիրառելիությունը: Հաստատվող այս ներդաշնակության գեղագիտական գրավչությունը ընդգծվում է գիտական գեղեցիկի միասնականության, ընդհանրականության և կիրառելիության հատկանիշների առկայությամբ:

Մենք արդեն խոսել ենք մաթեմատիկայի և բնության օրինաչափությունների, այդ օրինաչափություններն ուսումնասիրող բնական գիտությունների միջև առկա ներդաշնակության մասին: Եվ մաթեմատիկայի դասընթացը պետք է օգտվի այդ ներդաշնակությունից, այն արտահայտի յուրաքանչյուր նյութի շարադրման մեջ: Այս մոտեցումը թույլ կտա մաթեմատիկայի վերացական նյութի շարադրանքը դարձնել գրավիչ, մեծացնել ներմուծման մոտիվացիան, դրա նկատմամբ հետաքրքրությունը:

Հարկ է խոստովանել, որ ներդաշնակության սկզբունքը միշտ չէ, որ պահպանվում է, և հաճախ խախտվում է անգամ միննույն երկրի կրթական համակարգերում գործող մաթեմատիկայի դասընթացների և դասագրքերի սահմաններում: [7] աշխատանքում, օրինակ, մենք նշել ենք ԽՍՀՄ-ում գործող դասագրքերում նման բազմաթիվ խախտումներ: Բայց դրանք առավել ցցուն են մեզանում՝ ներկայումս գործող դասագրքերում: Բավական է նշել, որ միջին դպրոցի և ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքերի երկրաչափության դասագրքերը հենվում են աքսիոմների միանգամայն տարբեր համակարգերի վրա: Բազմաթիվ են ներդաշնակության սկզբունքի խախտումները հանրահաշվի և երկրաչափության, հանրահաշվի և մաթանալիզի դասընթացների միջև: Այս ամենը հետևանք

է հանրակրթության դասագրքերի ընտրության համակարգի ոչ պրոֆեսիոնալ, գործի շահերից չբխող մոտեցման:

Մաթեմատիկայի դասի ներդաշնակությունը: Առանձին քննարկման արժանի նյութ է մաթեմատիկայի դպրոցական դասի ներդաշնակության հարցը: Այստեղ առաջ են գալիս մի շարք բնական հարցադրումներ, որոնք չունեն միանշանակ լուծումներ: Բսկապես, այն, որ դասը՝ որպես ուսուցչի կողմից ուսուցանվող նյութի հաղորդման և աշակերտների կողմից դրա ընկալման և յուրացման գործընթաց, պետք է լինի միասնական, ներդաշնակ ամբողջություն, թվում է աներկբա ճշմարտություն: Մակայն ինչպե՞ս հասնել նման ներդաշնակության, երբ դասարանը կազմված է իրարից տարբեր ընդունակություններ, նախասիրություններ ու հետաքրքրություններ ունեցող տասնյակ երեխաներից: Եվ այդ երեխաների մեծ մասի ընդունակությունների, նախասիրությունների և հետաքրքրությունների ոլորտում ամեննին չեն տեղավորվում մաթեմատիկայի վերացական գաղափարները, որոնք թվում են այնքա՞ն հեռու իրենց մեջ նոր-նոր զարթոնող ու անհասկանալի թրթիռներից ու կանչերից: Ինչպե՞ս ստեղծել ներդաշնակության համար այնքա՞ն անհրաժեշտ համերաշխությունը մաթեմատիկական ընկալունակությունով իրարից շատ հեռու երկու աշակերտների միջև, մանավանդ երբ երկուսն էլ կարծես համակրքում են միևնույն աղջկան: Նկատի առնում է ուսուցիչը այստեղ նախանձի, թերաժեքության բարդության և երեխայի հոգեկանի վրա ազդող այլ բացասական երևույթների հնարավոր դրսևորումները: Կամ հասկանում է, որ ամեն անգամ երևան հանելով աշակերտի անկարողությունը, անգործությունը և մաթեմատիկայի հետ աշակերտի շփման արդյունքում ստացված այլ բացասական դրսևորումներ, նա նաև բացասական լիցքեր է ներարկում իր սանի հոգեկանում և նվազեցնում, դժգույն երանգ է հաղորդում նրա ապրելու կերպին: Պե՞տք է արդյոք այդ դեպքում աշակերտին նման դասը:

Իսկ միգուցե համերաշխությունը ստեղծվի բարու, բարության ընդհանուր մթնոլորտի ստեղծումով, հանդուրժողականությունը, կարեկցանքը, փոխօգնությունը, երախտագիտությունը նման մթնոլորտի ստեղծման համար անհրաժեշտ բարոյական լավագույն որակներն են, իսկ նախանձը, հիշաչարությունը, քինախնդրությունը, բռնությունը, անհանդուրժողականությունը, անբարյացակամությունը, ճնշումը, վրեժխնդրությունը, հարկադրանքը կխանգարեն այդ մթնոլորտի ձևավորմանը: Բարոյական այս որակները կարող են դրսևորել ինչպես աշակերտները, այնպես էլ

ուսուցիչը: Հասկանալի է, դրանց ազդեցությունը ավելի մեծ է ուսուցչի կողմից դրսևորման դեպքում: Ուսուցիչը պետք է իմանա նաև, որ չարի դրսևորման աղբյուր կարող են դառնալ նաև իր աշակերտի կամակորությունը, մոայլությունը, անբարեհամբույրությունը, խոժոռությունը, մեծամտությունը, հակաճառելու սովորությունը (տես [14]):

Ուսուցիչը պետք է ունենա նաև անհրաժեշտ մասնագիտական վարպետություն և մարդկային մեծ հոգի՝ կյանքի, արևի, աղջկա հագած նոր շորի, նրան ուղղված հայացքների, այս կամ այն աշակերտին ուղղված նրա հայացքի ու աշակերտի սիրտը, հոգին լցնող և ուշադրությունը գրավող հարյուրավոր այլ «մանրունքների» արանքում իր անկյանք մաթեմատիկական նյութը տեղավորել կարողանալու համար:

Իսկ դասարանի մի քանի ընտրյալներին մաթեմատիկա սովորեցնելը, ինչին սովորաբար հանգում է մեր ուսուցիչների մեծ մասի մաթեմի դասը, առանձնապես վարպետություն չի էլ պահանջում. նրանք առանց ուսուցիչի էլ կսովորեն իրենց անհրաժեշտ մաթեմատիկան:

Ռիթմը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում: Որպես իրականության ամենաբազմազան երևույթներում դրսևորվող օրինաչափություն՝ ռիթմը չէր կարող դուրս մնալ մաթեմատիկայից և նրա դպրոցական դասընթացից: Հավանաբար, ռիթմի ստեղծման մաթեմատիկական ակունքները զանազան առարկաների միջև երկտեղ առնչության փոխանցականությունն է. եթե մի առարկա առնչվում է երկրորդի, իսկ երկրորդը՝ երրորդի հետ, ապա առաջինը առնչվում է երրորդի հետ: Այս հատկության առկայության դեպքում, դիտարկվող առնչությունը, տեղափոխվելով առնչվող առարկաների հաջորդականությամբ, պահում է առնչվելու հատկությունը ոչ միայն իրար հաջորդող առարկաների, այլև հաջորդականության յուրաքանչյուր անդամի և դրանից հետո եկող ցանկացած անդամի միջև և ստեղծում որոշակի ռիթմ: Մաթեմատիկայում և մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում փոխանցական հատկությամբ օժտված են հավասարության, նմանության, մեծ լինելու, փոքր լինելու և նմանատիպ այլ կարևոր առնչություններ, ինչը փաստում է նաև ռիթմի լայն մասնակցությունը մաթեմատիկական գործունեության համապատասխան բնագավառներում: Մաթեմատիկական բանաձևերի հետևությունը և համարժեքությունը նույնպես օժտված են փոխանցականության հատկությամբ: Արդյունքում մենք հանգում ենք դատողությունների ռիթմի:

Մաթեմատիկան և նրա դպրոցական դասընթացը հնարավորություն ունեն մաթեմատիկական լեզվի միջոցներով արտահայտել ռիթմով ընթա-

ցող շատ երևույթներ, և դրանց ուսումնասիրության մեջ ներգրավել մաթեմատիկայի հարուստ զինանոցը: Մարմինների շարժման և այլ երևույթների ռիթմը լավագույնս արտահայտվում է համապատասխան ֆունկցիաների պարբերականությամբ: Եթե դիտարկենք նման երևույթները պատկերող (պարբերական) ֆունկցիաների գրաֆիկները, ապա դրանց առանձին հատվածներ պարբերաբար կրկնվում են, ինչը ցույց է տալիս նաև ռիթմի ուժը. այն կախված է պարբերության բարձրության և երկարության հարաբերությունից. ինչքան մեծ է այդ հարաբերությունը, այնքան ուժեղ է ռիթմը:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ուսումնասիրվում է պարբերական ֆունկցիաների բավականին լայն դաս, այդ թվում՝ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները: Բայց պետք է նշել, որ, սովորաբար, դասընթացը չի ուղեկցվում այդ ֆունկցիաների հիմքում ընկած իրականության ռիթմիկ երևույթների ուսումնասիրություններով, մեկնաբանություններով և լուսաբանություններով, ինչը նվազեցնում է ուսուցման արդյունավետությունը և թուլացնում դասավանդվող նյութի գեղագիտական գրավչությունը:

Ռիթմի մաթեմատիկական դրսևորումներից են նաև թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաները, որոնցից առաջինում ռիթմը բնութագրվում է պրոգրեսիայի տարբերությամբ, երկրորդում՝ քանորդով: Գոյություն ունեն նաև վերջավոր և անվերջ հաջորդականությունների ռիթմը նկարագրող այլ բնութագրիչներ:

2. Գիտական գեղեցիկի միավորող հատկանիշները

Բազմազանությունների միասնականությունը և ընդհանրականությունը: Բազմազանությունների միասնության և ընդհանրության՝ գիտական գեղեցիկի Ֆ. Հատչեսոնի հատկանիշները մեծ կիրառություն ունեն նաև մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում: Բերենք մի օրինակ [14]-ից:

Իմ ուսուցիչ, հարգելի Անուշավանը մեծ հմտություն էր ցուցաբերում մեր մեջ մաթեմատիկայի նկատմամբ հետաքրքրություն և սեր սերմանելու գործում: Մի անգամ դասարան մտնելով՝ նա գրատախտակին գծեց երկու զուգահեռ ուղիղներ, ստորին ուղղի վրա վերցրեց մի հատված, իսկ վերին ուղղի վրա, հատվածի վերնում՝ երկու կետեր, ու դրանք միացրեց

հատվածի ծայրակետերին: Ստացվեցին երկու եռանկյուններ: «Ո՞ր եռանկյան մակերեսն է մեծ», -հարցրեց հարգելի Անուշավանը: Մինչ մենք մտածում էինք խնդրի շուրջ, նա վերին ուղղի վրա վերցրեց մի այլ կետ, այս անգամ նախկին կետերից շատ հեռու, նորից միացրեց հատվածի ծայրակետերին և կրկնեց իր հարցը: Ստացված եռանկյունը շատ ավելի «նեղ» էր նախկիններից, բայց և շատ ավելի երկար էր «ձգվում»: Դժվար էր նրա մակերեսը համեմատել նախկին եռանկյունների մակերեսների հետ: Երբ որոշ ժամանակ սպասելուց հետո անհրաժեշտ պատասխանը չստացվեց, հարգելի Անուշավանը մաքրեց գրատախտակը և հայտարարեց նոր դասի թեման՝ եռանկյան մակերեսը: Եվ դասը բացատրելուց հետո գրատախտակի անկյունում գրեց $S = \frac{1}{2} ah$ բանաձևը, մաքրեց գրատախտակի մնացած մասը և նորից գծեց իր զուգահեռ ուղիղները, եռանկյունները ու կրկնեց իր նախկին հարցադրումը: Անհնարին թվացող համեմատությունը մաթեմատիկական բանաձևի միջոցով դարձել էր ակնհայտ. բոլոր եռանկյունները ունեին նույն մակերեսը, որովհետև նույնն էին նրանց հիմքերը և իրար հավասար էին բարձրությունները: «Ահա մաթեմատիկայի ուժը», -լսելով մեր ճիշտ պատասխանը, հպարտությամբ հայտարարեց հարգելի Անուշավանը, կավիճը դրեց ցած ու, կավճոտ ձեռքերը մաքրելով, դասարանից դուրս եկավ՝ չնայած զանգը դեռ չէր հնչել: Իսկ մենք այս անգամ չպոկվեցինք մեր տեղերից ու դասարանից դուրս չնետվեցինք, ինչպես անում էինք սովորաբար: Որովհետև այդ ուժը նաև գեղեցիկ էր, իսկ գեղեցիկից չէինք ուզում բաժանվել: Թեև $S = \frac{1}{2} ah$ բանաձևի մեջ դրսևորվում են մաթեմատիկական գեղեցիկի այնպիսի հատկանիշներ, ինչպիսիք են անսպասելիությունը և անկանխատեսելիությունը, բայց ավելի տպավորիչ էին բազմազանությունների միասնության և ընդհանրականության հատկանիշների դրսևորումները: Իսկապես, չնայած ստացված արդյունքը չափազանց անսպասելի էր ու անկանխատեսելի, բայց ավելի կարևոր էր թվում, որ այն հնարավորություն էր տալիս որոշել ցանկացած եռանկյան մակերեսը, ինչը լայն կիրառելիության հետ միասին ցույց էր տալիս նաև նրա ընդհանրականությունը: Մինևնույն ժամանակ, այն միավորում էր բոլոր եռանկյունները՝ մակերեսների հաշվման միասնական բանաձևով:

Գիտական ձեռքբերման հստակ և ներդաշնակ մաթեմատիկական ձևակերպումը: Մաթեմատիկայի գեղագիտության՝ Մ. Վ. Վոլկենշտեյնի ձևակերպած այս հատկանիշի համաձայն՝ գիտական ձեռքբերման յուրա-

քանցյուր հստակ և ներդաշնակ մաթեմատիկական ձևակերպում առաջ է բերում գեղագիտական տպավորություն [68]: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում այն լայնորեն դրսևորվում է կիրառական խնդիրների լուծման և միջառարկայական կապերի իրականացման ընթացքում: Հիշենք, որ մեխանիկայի օրենքների նման մաթեմատիկական ձևակերպումներից ստացած իր այդ տպավորությունը այնքան մեծ է եղել, որ Նյուտոնը դրանք համարել է Աստծո գոյության ապացույց: Բազմաթիվ են կենսաբանության օրինաչափությունները, որոնք նկարագրվում կամ ներկայացվում են մաթեմատիկական գրառումներով: Բերենք միայն երեք օրինակ [8] դասագրքից:

1) Անգլիախոս երկրներում ջերմաստիճանը չափում են ֆարենհայտներով: Ֆարենհայտի (F) և ցելսիուսի (C) կապը արտահայտվում է $F = 1,8C + 32$: Քանի՞ ցելսիուս է 68 ֆարենհայտը: ([8], խնդիր 187):

2) Գիտե՞ք, որ կարող եք որոշել օդի ջերմաստիճանը, լսելով ծղրիդին: Եթե n -ով նշանակենք մեկ րոպեում ծղրիդի արձակած ճոռոցների թիվը, ապա օդի ջերմաստիճանը ֆարենհայտերով կարտահայտվի $F = 0,25n + 37$ հավասարությամբ: ա. Որոշեք օդի ջերմաստիճանը, եթե ծղրիդի արձակած ճոռոցների թիվը րոպեում եղել է 200: բ. Ցելսիուսով արտահայտեք օդի ջերմաստիճանի կախվածությունը n -ից: ([8], խնդիր 188):

3) Եթե մարդու հասակը h սմ է, իսկ քաշը m կգ, ապա նորմալ մարդու քաշը թվային արտահայտությամբ պետք է որոշվի $m = 0,9h - 90$ բանաձևով: Որքա՞ն պետք է լինի 150 սմ հասակ ունեցող յոթերորդ դասարանցու նորմալ քաշը: ([8], խնդիր 189):

Որոշ ուսուցիչներ ելնում են այս հատկանիշից, երբ ուսուցման ընթացքում կարևոր բանաձևերն առանձնացնում են վանդակների մեջ առնելով:

Այս շարքին պետք է դասել նաև մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում առկա տեքստային խնդիրների մաթեմատիկական մոդելավորումները: Այստեղ սակայն նկատվում է մաթեմատիկական ձևակերպման որոշ գերազնահատում. աշակերտը (նաև ուսուցիչը), կատարելով կիրառական խնդրի մաթեմատիկական մոդելավորումը՝ այն ներկայացնելով մաթեմատիկական բանաձևի (հավասարման կամ անհավասարման) տեսքով, անցնում է դրա լուծմանը և ստանալով մաթեմատիկական մոդելի պատասխանը՝ կանգ է առնում՝ առանց ուշադրություն դարձնելու ստացված պատասխանի հետ կիրառական խնդրի համեմատմանը, դրա վերլուծությանը: Չպետք է կարծել, որ սա արվում է այստեղ ներկայացվող գեղագիտական հատկանիշի դերը նշանակալից դարձնելու պատճառով:

Ուղղակի տվյալ դեպքում աշակերտին հետաքրքրում է միայն խնդրի լուծումը և նրա ճիշտ պատասխանի ստացումը, այսինքն՝ ուսուցչի հանձնարարության կատարումը, ինչը ցույց է տալիս, որ աշակերտի գործունեությունը հեռու է գեղագիտական մոտիվներից:

Հեղափոխական քայլը: Մեծ է հեղափոխական քայլի, նրա գեղագիտական գրավչության դերը մաթեմատիկայում, ինչին մենք անդրադարձանք այս աշխատանքի առաջին մասում (տես [25], էջ 58-63): Հեղափոխական քայլեր առկա են նաև մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում: Թվի, փոփոխականի, հանրահաշվական գործողությունների, հավասարության և անհավասարության, ֆունկցիայի, ածանցյալի, ինտեգրալի, լոգարիթմի, կետի, ուղղի, հարթության, շրջանագծի հասկացությունների ներմուծումները, զուգահեռության աքսիոմը, եռանկյունների հավասարության հայտանիշները, Պյութագորասի և Թալեսի թեորեմները և այլ հասկացություններ ու փաստեր, ըստ էության, մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի կառույցում իրականացվող հեղափոխական քայլեր են:

Հասկանալի է, որ հեղափոխական քայլ հանդիսացող նյութերն առանցքային նշանակություն ունեն մաթեմատիկայի դասընթացի համար, պահանջում են մեծ ուշադրություն և դասավանդման յուրահատուկ մոտեցում: Ահա նման մոտեցման մի օրինակ:

Իմ ուսուցիչը՝ հանրահայտ մաթեմատիկոս Ա. Գ. Կուրոշը, մի անգամ, խոսելով իր մաթանալիզի դասախոսի ուսուցչական վարպետության մասին, արեց հետևյալ պատմությունը: «Ածանցյալի գաղափարը ներմուծելիս նա ցույց էր տալիս դրա կարևորությունը, ներկայացնում ձևավորման պատմությունը, ներմուծում էր սահմանումը, բերում օրինակներ, կիրառություններ և դասի կեսին հայտարարում դրա ավարտը: Հետո, երբ մենք կոլեգաներ էինք, իմ այդ դասախոսը մեկնաբանեց իր քայլը՝ նշելով, որ ածանցյալի գաղափարի ներմուծումը հեղափոխություն է առաջացրել ողջ մաթեմատիկայում, առանցքային նշանակություն ունի մաթանալիզի դասընթացում, և սովորողներին ժամանակ է պետք այն մարսելու համար»:

Մաթեմատիկայի որոշ ուսուցիչներ հեղափոխական քայլ պարունակող նյութերի ուսուցումը կազմակերպելիս ընտրում են զրույցներ, բանավեճեր, շարադրությունների կազմում և ուսուցման ոչ ավանդական այլ մեթոդներ ու եղանակներ: Մի բան ակնհայտ է. հեղափոխական քայլերով իրականացվող գործընթացները բարդ են և ունեն կարևոր

նշանակություն ողջ դասընթացի համար: Հետևաբար, դրանց ուսուցման ընթացքը պետք է զերծ պահել ավելորդ շտապողականությունից և ակնկալել նյութի խորը և համակողմանի յուրացում աշակերտական հնարավորինս լայն շերտերի կողմից:

Ինքնատիպությունը: Գիտական գեղեցիկի ինքնատիպության հատկանիշը ինչ-որ իմաստով շեղումն է բազմազանությունների միասնականության և ընդհանրականության հատկանիշներից և ոչ կադապարված մոտեցում է: Այս շարքին են դասվում մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի բոլոր այն խնդիրները, որոնք առանձնացվում են «ոչ ստանդարտ» բնորոշմամբ: Ինքնատիպ կարող են լինել նաև թեորեմի ապացուցումը և խնդրի լուծումը:

Ինքնատիպ կամ ոչ ստանդարտ խնդիրների լուծումները սովորաբար մաթեմատիկական լայն գիտելիքների վրա չեն հենվում, այլ ենթադրում են մտքի ճկունություն, շարժունակություն, խորաթափանցություն, մտածողության տրամաբանություն, լայնախոհություն, հատկանիշներ, որոնք բնորոշում են մարդու ինտելեկտը: Հետևաբար, ինքնատիպության հատկանիշը ուսուցչին հնարավորություն է տալիս ստուգելու և «հայտնաբերելու» իր այն աշակերտներին, որոնք չունեն անհրաժեշտ մաթեմատիկական գիտելիքներ, սակայն առանձնանում են ինտելեկտի զարգացածությամբ, և համապատասխան աշխատանքի դեպքում հեշտությամբ կկարողանան վերացնել ծրագրով նախատեսված մաթեմատիկական գիտելիքների պակասը և ցուցաբերել բարձր առաջադիմություն:

Ահա մի ինքնատիպ խնդրի և նրա՝ ավելի քան ինքնատիպ լուծման օրինակ: Դիցուք ունենք երկու խաղացողներ՝ Ա և Բ: Նրանք ուղղանկյունաձև կամ շրջանաձև սեղանի վրա հերթականությամբ տեղադրում են միննույն տեսքն ու չափերն ունեցող ֆիշկաներ: Հաղթում է նա, ով տեղադրում է վերջին ֆիշկան. այլևս տեղ չի մնում նոր ֆիշկա տեղադրելու համար: Ապացուցեք, որ սկսողը կհաղթի:

Առաջին հայացքից խնդիրը բավականին դժվար է թվում: Բայց այստեղ անսպասելիորեն օգնության է գալիս համաչափության գաղափարը: Պարզ է, որ այսպիսով՝ սկսողը կհաղթի: Խաղը սկսողը իր առաջին ֆիշկան տեղադրում է սեղանի կենտրոնում և հակառակորդի յուրաքանչյուր քայլի դեպքում իր ֆիշկան տեղադրում է նրա տեղադրած հերթական ֆիշկայի սիմետրիկ կետում (կենտրոնի նկատմամբ): Ահա համաչափության մի պարզ կիրառություն:

Ահա նման մի օրինակ նա: Հայրը, մայրը, տղան ու տատիկը հասան կամրջին, երբ մութն արդեն ընկել էր: Հայրը կարող էր կամուրջն անցնել 1 րոպեում, մայրը՝ 2 րոպեում, տղան՝ 5 րոպեում, իսկ տատիկը՝ 10 րոպեում: Կամրջով միաժամանակ կարող են անցնել միայն երկուսը, այն էլ լուսավորված լապտերով, և ունեն միայն մեկ լապտեր, որը նետել չի կարելի: Իսկ նրանք անցնելու համար ունեին ընդամենը 17 րոպե: Ինչպե՞ս կանեին դա:

Խնդիրը ինքնին հետաքրքիր է, բայց ավելի հետաքրքիր ու ինքնատիպ է նրա լուծումը: Թվում է (կանխատեսելի է), թե կամուրջն անցնելու համար ամենաքիչ ժամանակը կձախսվի, եթե յուրաքանչյուրին ուղեկցի հայրը և հետ վերադառնա, որովհետև նա վերադառնալու համար ծախսում է բոլորից քիչ ժամանակ: Բայց դժվար չէ հաշվել, որ այդ դեպքում նրանք բոլորը կամուրջն անցնելու համար կձախսեն առնվազն 19 րոպե: Հասկանալի է, որ քիչ ժամանակ ձախսելու տեսակետից լավագույն տարբերակը կունենանք, եթե երկու ամենաշատ ժամանակ ձախսողները՝ տղան և տատը անցնեն միաժամանակ: Այդ դեպքում նրանք կձախեն տասը րոպե: Հասկանալի է նաև, որ նրանցից ոչ մեկը չպետք է հետ գա, քանի որ այդ դեպքում կամուրջն անցնելու համար հատկացվող ժամանակից ավելի կձախսեն: Ուրեմն՝ հետ եկողներ պետք է լինեն ամենաքիչ ժամանակ ձախսողները՝ հայրն ու մայրը: Այսինքն՝ նրանք միասին երկու անգամ պետք է անցնեն կամուրջը: Այսպիսով, կամուրջը մեկ անգամ անցնում է տղայի և տատի գույգը, երկու անգամ էլ հոր և մոր գույգը: Հասկանալի է, նաև, որ վերջին գույգը կամուրջը անցնում է նախ սկզբում, ապա վերջում: Եվ այսպես, մենք ստանում ենք խնդրի ինքնատիպ ու անկանխատեսելի մի լուծում: Նախ կամուրջն անցնում են հայրն ու մայրը, որից հետո հայրը հետ է վերադառնում: Այս գործողությունների համար ծախսվում է 3 րոպե: Այնուհետև կամուրջն անցնում են տղան ու տատը, որի համար ծախսվում է նա տասը րոպե: Դրանից հետո հետ է վերադառնում մայրը և կամուրջն անցնում է իր ամուսնու հետ միասին՝ ձախսելով 4 րոպե: Այսպիսով, բոլոր այդ գործողությունների կատարման համար կձախսվի ընդամենը 17 րոպե:

3. Գիտական գեղեցիկի տրամաբանական հատկանիշները

Տրամաբանական խստությունը: Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում տրամաբանական խստության կարևորությունը հետևում է ուսուցման գիտականության դիդակտիկական սկզբունքից: Որպես դասընթացի գեղագիտական հատկանիշ՝ այն առաջադրում է Գ. Ի. Սաբանցը: Ի տարբերություն բուն մաթեմատիկայի, դպրոցական դասընթացում տրամաբանական խստությունը ըստ կրթական աստիճանների դրսևորվում է ոչ համասեռ կերպով: Այն բավականին թույլ է արտահայտվում տարրական դպրոցում և մեծացնում է իր ներկայությունը կրթական աստիճանների զարգացմանը համընթաց: Տրամաբանական խստությունը անհամասեռ է իրականացվում նաև առանձին թեմաների ուսուցման շրջանակներում: Բուն մաթեմատիկական նյութի շարադրման մեջ այն դրսևորվում է ավելի լիարժեք, իսկ կիրառություններին նվիրված մասերում լավ չի արտահայտվում: Հարկ է նկատել նաև, որ ելնելով ուսուցման մատչելիության դիդակտիկական սկզբունքից՝ դասընթացի առանձին հարցերի շարադրման ընթացքում հաճախ անհրաժեշտ է լինում հրաժարվել տրամաբանական խստությունից:

Մաթեմատիկայի ուսուցման նախնական շրջանում տրամաբանական խստության հատկանիշի կիրառումը սովորողի մոտ ձևավորում է դատողություններ անելիս սխալվելու և չսխալվելու գիտակցությունը, դնում է անսխալ դատողություններ կատարելու կարողության հիմքերը: Արդեն ուսուցման այս փուլում մաթեմատիկական սովորողի համար սկսում է դառնալ ճշգրտության, ճշմարտության արտահայտման չափանիշ:

Միջին դպրոցում սովորողը ծանոթանում է ղեղուկտիվ մտահանգման միջոցով ճշմարիտ փաստերից ճշմարիտ եզրակացություն կատարելու հնարքների: Այստեղ հիմնական դերը խաղում է ապացուցումը՝ մաթեմատիկայի այդ արվեստը, որն ունի գեղեցիկի ձևավորման մեծ ներուժ: Այս տեսակետից առանձնապես կարևոր է միջին դպրոցի երկրաչափության դասընթացը, որտեղ ապացուցումը՝ որպես ճշմարտության հաստատման միջոց, հանդես է գալիս առաջին անգամ, իսկ փաստերի բխեցման գործընթացը, դրա իրականացման հնարքները դրսևորվում են մեծ ուժով: Նկատենք, որ ուսումնական նյութի համապատասխան շարադրանքի դեպքում նմանատիպ հնարավորություններ է ձեռք բերում նաև հանրահաշվի դասընթացը, ինչը մեծացնում է դրա ուսուցման գեղագիտական գրավչությունը (տես, օրինակ, [9]-[11]):

Տրամաբանական խստության հատկանիշի միջոցով գեղեցիկի ձևավորման մաթեմատիկայի ներուժը առանձնապես մեծ թափ, որակ ու գեղագիտական գրավչություն է ստանում ավագ դպրոցում դեդուկտիվ մտահանգումներ, եզրակացություններ կատարելու, ապացուցման մաթեմատիկական մեթոդների կիրառության ընթացքում: Այստեղ ինդուկցիայի, անալոգիայի և այլ մեթոդներով կատարվող տարբեր մտահանգումներում և ապացուցումներում տրամաբանական խստությունը ստանում է նոր երանգ և զուգորդվում է նաև բազմազանությունների միասնության և ընդհանրականության գեղագիտական հատկանիշների հետ: Իսկապես, եթե թվաբանական կամ երկրաչափական պրոգրեսիաների ընդհանուր անդամների կամ գումարների բանաձևերը միջին դպրոցում «ապացուցվում» են մաթեմատիկական թերի ինդուկցիայի միջոցով, ապա այդ և նմանատիպ այլ մտահանգումներ ավագ դպրոցում հնարավոր է դառնում ապացուցել մաթեմատիկական լրիվ ինդուկցիայի ներգրավմամբ:

Տրամաբանական խստության գեղագիտական հատկանիշը դրսևորման լայն հնարավորություն է ստանում մաթեմատիկայի դասընթացում՝ տրամաբանության տարրերի ներառման պայմաններում: Այդ պայմաններում դատողությունների, դրանցից տրամաբանական շաղկապների միջոցով ստացված նոր դատողությունների ճշմարտական արժեքների ճշգրիտ սահմանումները և տրամաբանության կարևորագույն տարրերի ներմուծումը ամուր հող են ստեղծում հիմնավորված, փաստարկված եզրահանգումներ կատարելու համար (տես [7]):

Հստակությունը: Հստակության գեղագիտական հատկանիշն առանձնապես կարևոր է և ցայտուն է դրսևորվում ուսուցման գործընթացում: Այստեղ է ձևավորվում և հետագա զարգացում ստանում մարդու մտածողությունը, և ինչպիսին կլինի այն ապագայում, ձեռք կբերի՝ մարդը իր ամենամեծ հարստությունը՝ հստակ, փաստարկված խոսքի մշակույթը, կախված է ուսուցման գործընթացից: Եվ, ինչպես այդ մշակույթի, այնպես էլ նրա կարևոր բաղադրիչներից մեկի՝ հստակության ձևավորման գործում առաջնահերթ նշանակություն ունի մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը: Մաթեմատիկական գործունեությունը ձևավորում է հստակության յուրահատուկ, իդեալական մի չափանիշ, որի հետ համապատասխանությունը եթե պարտադիր էլ չէ, ապա ցանկալի է մանավանդ գիտական, քաղաքական, իրավական և որոշ այլ ոլորտներում: Այդ չափանիշի տեսանկյունից հաճախ դժվար է լինում հասկանալ, օրինակ,

հումանիտար բնագավառի գիտություններում կամ քաղաքականության ասպարեզում արված զանազան դատողություններ:

Հստակության գեղագիտական հատկանիշը, ի տարբերություն մաթեմատիկայի, նրա ուսուցման գործընթացում ունի որոշ առանձնահատկություններ և դրսևորման յուրահատկություններ:

Այստեղ, առաջին հերթին, խոսքը վերաբերում է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի լեզվին: Այդ լեզուն գուտ մաթեմատիկական չէ և ոչ էլ նրա մի մասն է: Ճիշտ է, այն խարսխվում է մաթեմատիկական լեզվի հենքի վրա, սակայն ներառում և ամբողջանում է առօրյայում և գիտության զանազան բնագավառներում մաթեմատիկայի բազմապիսի կիրառությունների հետ կապված լեզվական դրսևորումներով: Այս տեսակետից վստահաբար կարելի է ասել, որ միայն մաթեմատիկա պարունակող դպրոցական դասընթացները, եթե անգամ շարադրված են շատ հստակ (ինչի հնարավորությունը տալիս է համապատասխան նյութը), հեռու են հանրակրթական նպատակներից, իսկ առկա հստակությունն էլ չի կարելի համարել գեղագիտական:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի լեզվի հստակեցման գործում մեծ նշանակություն ունի նրանում տրամաբանության տարրերի ներառումը: Առանց տրամաբանության տարրերի իմացության դժվար է հասնել մտքի հստակ, տրամաբանորեն հիմնավորված շարադրանքի, այնպես, ինչպես առանց քերականության կանոնների իմացության անհրճաբ է մայրենի լեզվով ճշգրիտ նախադասություններ ու մտքեր կառուցել: Բայց հանրակրթական դպրոցի ծրագրերում տրամաբանության տարրերի ուսուցում նախատեսված չէ, և միակ ուսումնական առարկան, որն ի գործ է իրականացնել նման ուսուցում, մաթեմատիկան է: Պե՞տք է, արդյոք, տրամաբանության տարրերը ներառել մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի մեջ: Սա բարդ խնդիր է, որի լուծման ուղղությամբ կան իրարամերժ կարծիքներ: Եվ բազմաթիվ են այն հեղինակները, որոնք գտնում են, որ առանց այդ տարրերի ներմուծման՝ մաթեմատիկական գործունեությունը զրկվում է հստակության և տրամաբանական խստության իր խաղաքարտերից: Նրանք ապացուցում են, որ ինչպես տրամաբանական մտածողության, այնպես էլ լեզվամտածողության ձևավորման խնդրի լիարժեք լուծումը հնարավոր է իրականացնել միայն տրամաբանության տարրերը մաթեմատիկայի դասընթաց ներմուծելու ճանապարհով (տես [7], [195]):

Իսկապես, փորձեք առանց այդ տարրերի իմացության պարզել, թե արդյո՞ք ճշմարիտ է $2 \leq 2$ բանաձևը կամ արդյո՞ք հավասարություն է $1 = \pm -1$ բանաձևը: Վերջին հարցը կարևոր է կապված քառակուսային հավասարումների արմատի բանաձևի մեջ $\pm$ նշանի օգտագործման հետ: Եվ փորձը ցույց է տալիս, որ անգամ ուսուցիչների ճնշող մեծամասնությունն, ըստ էության, չի հասկանում այդ նշանի իմաստը: Հետևաբար, նույնիսկ նրանց մոտ գիտելիքը կրում է սերտողական բնույթ: Հեղինակի [9]-[11] դասագրքում կա «Գտեք սխալը» խորագրով մի այսպիսի խնդիր: Ունենք $1 = \pm 1$ և $\pm 1 = -1$ ճշմարիտ բանաձևերը: Հետևաբար, համաձայն հավասարության փոխանցական հատկության, $1 = -1$: Ուսուցիչների ճնշող մեծամասնությունը դժվարանում է գտնել այս «ապացուցման» մեջ թույլ տված սխալը: Այնինչ, հարկ է «ճիշտ հավասարության» ջատագով ողոսական մի շարք հեղինակների և դրանց հայրենի ընդօրինակողներին հիշեցնել, որ հավասարության միջոցով գրված ճշմարիտ բանաձևեր կարող է և հավասարություն չլինել, ինչը առկա է տվյալ օրինակներում:

Իսկ այդ բանաձևի, ինչպես նաև $2 \leq 2$ ոչ խիստ անհավասարության ճշմարտացիության հարցը, հստակեցվում, լուծվում է տրամաբանական գումարի հասկացության պարզագույն կիրառման շնորհիվ: Իսկապես, $2 \leq 2$ բանաձևը $2 < 2$ և $2 = 2$ բանաձևերի « $2 < 2$ կամ $2 = 2$ » տրամաբանական գումարն է, որը ճշմարիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ճշմարիտ է նրա բաղադրիչներից մեկը: Տվյալ դեպքում « $2 < 2$ կամ $2 = 2$ » բանաձևի $2 = 2$ բաղադրիչը ճշմարիտ է, ինչից հետևում է, որ ճշմարիտ է նաև « $2 < 2$ կամ $2 = 2$ » բանաձևը կամ նրա $2 \leq 2$ համառոտագրությունը:

Ինչ վերաբերում է երկրորդ օրինակին, ապա $1 = \pm 1$ բանաձևը $1 = 1$ և $1 = -1$ բանաձևերի « $1 = 1$ կամ $1 = -1$ » տրամաբանական գումարն է, որը, ինչպես նաև երկրորդ՝ $\pm 1 = -1$ բանաձևը հավասարություններ չեն: Հետևաբար, թեպետ և նրանք ճշմարիտ են, բայց որովհետև հավասարություններ չեն, մենք իրավունք չունենք նրանց նկատմամբ կիրառել հավասարությունների փոխանցական օրենքը:

Բերենք ևս մեկ օրինակ: Փորձեք հանրակրթական դպրոցի աշակերտներին կամ հանրակրթական դպրոցն ավարտած քաղաքացիներին տալ այսպիսի առաջադրանք՝ Ժխտեք «Բոլորը տանն են» դատողությունը: Վստահաբար՝ հատուկենտ չեն լինի նրանք, որոնք կրնորեն կարճ ճանապարհը և «են» մասնիկը կփոխարինեն «չեն»-ով (և, բնականաբար, կսխալվեն): Իսկ հարցի լուծումը դարձյալ տրամաբանության տարրերի ուսուցման մեջ է. պետք է այդ տարրերի ուսուցման միջոցով սովորեցնել

աշակերտին ժխտել դատողություններ, այդ թվում՝ նաև օրինակում բերվածը:

Հարկ է նկատել, որ տրամաբանության տարրերը մաթեմատիկայի դասընթացի միջոցով հանրակրթություն ներմուծելու առաջարկներ շատ են եղել, բայց [10] դասագրքում նման փորձ կատարվել է առաջին անգամ: Եվ թեև սկզբնական շրջանում իրենց պահպանողական մտածողությամբ աչքի ընկնող մաթեմատիկայի մեր ուսուցիչների մոտ այդ փորձը հանդիպեց որոշ դիմադրության, սակայն հետագայում ուսուցչությունն ընկալեց դրա անհրաժեշտությունը և առավելությունները:

Բնական (հայոց) լեզվի հետ մաթեմատիկական լեզվի փոխհարաբերությունների հարցը մեր կողմից հանգամանորեն քննարկվել է [7] աշխատանքում: Այստեղ նշենք, օրինակ, որ $\leq$ մաթեմատիկական նշանի լեզվական՝ «մեծ չէ» հարաբերության տեսքով ներկայացումը հստակություն է մտցնում ուսուցման գործընթացում, իսկ կիրառական ոլորտում այդ առնչության փոխարինումը «չի հասել», «երկար չէ», «թանկ չէ» և նմանատիպ այլ արտահայտություններով, ամբողջացնում է տվյալ հասկացության ուսուցման գործընթացը՝ միաժամանակ ցույց տալով բնական լեզվի ձևերի բազմազանությունն ու հարստությունը և բազմազանությունների միասնության միջոցով մաթեմատիկական լեզվում միարժեքության և հստակության ստեղծումը: Նույն կերպ $<$ նշանը, կախված կիրառվող օբյեկտի չափման մեծությունից, բնական լեզվում արտահայտվում է «կարճ է», «նեղ է», «ծանձաղ է» և այլ հարաբերություններով, գումարումը՝ «ավելացնել», «միավորել», «խորացնել», «խառնել», «երկարացնել» և այլ հասկացություններով, հանումը՝ «պակասեցնել», «կարճացնել», «էժանացնել», «դանդաղեցնել» և այլ հասկացություններով՝ դարձյալ կախված կիրառության օբյեկտի չափման մեծությունից: Այստեղ նույնպես նշված մաթեմատիկական օբյեկտներին լրացուցիչ գեղագիտական գրավչություն է հաղորդում նրանց միջոցով համապատասխան լեզվական բազմազան արտահայտությունների միավորման կամ միասնության գեղագիտական հատկանիշը: Իսկ բնական լեզվի հետ դիտարկվող կապերը ոչ միայն նպաստում են մաթեմատիկական լեզվի հստակեցմանը և նյութի համակողմանի ըմբռնմանը, այլև ավելի արդյունավետ են դարձնում մայրենի լեզվի յուրացման գործընթացը:

Ինչպես մաթեմատիկայում, այնպես էլ նրա դպրոցական դասընթացում հստակությունը առաջին հերթին պահանջում է ուսումնասիրվող հասկացությունների միանշանակ, անորոշություններից զերծ սահմա-

նումներ: Մա ոչ միայն հստակության գեղագիտական հատկանիշի արտահայտությունն է, այլև մաթեմատիկայի, նրա դպրոցական դասընթացի ու մաթեմատիկական լեզվի գեղագիտության հիմքը. առանց հստակ, միանշանակ ընկալման չկա մաթեմատիկա:

Հստակության գեղագիտական գրավչությունն ակնառու է դրսևորվում նաև մաթեմատիկական թեորեմներում: Այստեղ հստակությունը, նախ, նշանակում է անհրաժեշտ պայմանների կամ նախադրյալների ու եզրակացության հստակ ձևակերպում և աշակերտի համար դրանց մատչելի ներկայացում: Շատ կարևոր է, որ սովորողը հասկանա թեորեմի պայմաններից յուրաքանչյուրի դերը նրա եզրակացության հաստատման, ապացուցման գործընթացում: Տեխնիկական տեսակետից, սովորաբար, ավելի դժվար է ըմբռնվում թեորեմի ապացուցումը, որը նույնպես պետք է աչքի ընկնի իր հստակությամբ. այն կատարվում է որոշակի քայլերի հստակ հերթականությամբ, որոնք ճշմարիտ մտահանգումներ են և արդյունքում հանգեցնում են թեորեմի եզրակացությանը:

Մաթեմատիկական դատողությունների կատարման ընթացքում հստակության հատկանիշն ավելի ակնառու դարձնելու համար անհրաժեշտ է յուրաքանչյուր մաթեմատիկական նյութի ուսուցում ուղեկցել առօրեական կամ հումանիտար բնագավառների դատողություններով, որոնք, իրենց անհստակության պատճառով, միանշանակ չեն ընկալվում և առիթ են տալիս տարաբնույթ մեկնաբանությունների:

Նույնը վերաբերում է խնդիրներին. եթե դրանց պայմանները բավարար չեն լուծման համար կամ հստակ չեն՝ լավ չեն հասկացվում, ապա լուծում չի կարող ստացվել:

Հարկ է նկատել, որ մաթեմատիկական նյութի հստակության գեղագիտական հատկանիշը դրսևորվում է նրա ընկալմանը, ըմբռնմանը զուգընթաց: Առանց ըմբռնման չի կարող լինել նաև հստակություն և գեղագիտական գրավչություն: Ըմբռնման բացակայությունը, նյութի մեխանիկական վերարտադրությունը, որ հետևանք է նաև հստակության բացակայության, ոչ միայն չի նպաստում նյութի գեղագիտական գրավչության արտահայտմանը, այլև երևան է բերում բացասական գեղագիտական ռեակցիա, սովորողին վանում է նյութից և մաթեմատիկայից ընդհանրապես: Իսկ սովորողի՝ ամեն գնով ինչ-որ իմացություն ցուցադրելու կամ ուսուցչի՝ սովորողից գիտելիքի վերարտադրություն ստանալու ջանքերը հաջողությամբ պսակվելու դեպքում էլ, ունենում են միայն բացասական հետևանքներ. նման պատասխանների սովորած աշակերտը ոչ միայն

հեշտությամբ մոռանում է իր վերաբարտադրած գիտելիքը, այլև վարժվում է կյանքում կամ մասնագիտական գործունեության մեջ, առանց երևույթների խորքերը թափանցելու, հապճեպ, մակերեսային գործողությունների կատարման: Հետևաբար, ուսուցիչը պարտավոր է ոչ թե ամեն գնով, մեկերկու բառ ուղղելով աշակերտից պատասխան կորզել, այլ հասկացնել նրան նյութի էությունը՝ ելնելով հստակության գեղագիտական հատկանիշից և ուղղել սխալը, եթե այն թույլ է տրված:

Նշենք նաև ուսուցչի բանավոր խոսքի մեջ հստակության գեղագիտական հատկանիշի առկայության անհրաժեշտությունը, ինչը կարևոր է նաև ուսուցման գործընթացի արդյունավետ կազմակերպման տեսանկյունից:

Պարզությունը, բարդի հանգեցումը պարզին: Բարդը պարզին հանգեցնելու հատկանիշը որպես գիտական գեղեցիկի հատկանիշ առաջադրել է Վ. Մ. Վոլկենշտեյնը (տես [70]): Պարզությունը որպես մաթեմատիկայի դասընթացի գեղեցիկի հատկանիշ առաջադրում են Վ. Գ. Բոլտյանսկին, Գ. Բ. Սարանցևը, Մ. Ս. Յակիրը: Պարզը, պարզությունը, նրա առկայությունը յուրաքանչյուր գործընթաց դարձնում է գեղեցիկ, իսկ բարդը հաճախ դառնում է նաև անհասկանալի, հետևաբար՝ ոչ գեղեցիկ: Այդ պատճառով բարդը պարզին հանգեցնելը, պարզ դարձնելը արդեն գեղեցիկի ձևավորմանն ուղղված գործընթաց է:

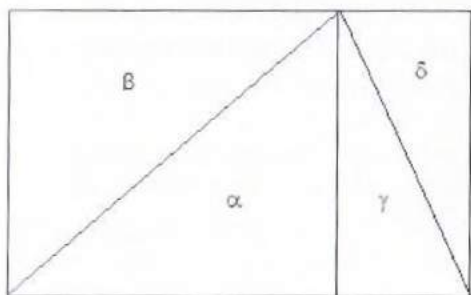
Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գեղագիտական այս հատկանիշը առաջին հերթին դրսևորվում է հասկացությունների ուսուցման ընթացքում: Կամայական հասկացության համար յուրաքանչյուր օրինակի և ժխտօրինակի դիտարկումը արդեն բարդի հանգեցում է պարզին: Հետևաբար, ուսուցիչը յուրաքանչյուր հասկացության ներմուծումը պետք է ուղեկցի նրա ծավալին պատկանող օրինակների դիտարկմամբ: Հմուտ ուսուցիչը նման օրինակներ կդիտարկի հասկացության ներմուծումից առաջ: Մեծ մասամբ նմանատիպ գործընթաց է նաև ամենամոտ սեռի միջոցով հասկացության սահմանումը: Օրինակ, կանոնավոր եռանկյան սահմանումը հանգեցվում է եռանկյան և նրա ներքին անկյունների հավասարության, սեղանի սահմանումը հանգեցվում է քառանկյան և գուգահեռության և այլն:

Պարզը պարզին հանգեցնելու գեղագիտական հատկանիշը դրսևորվում է նաև հասկացությունների կիրառություններում: Մաթեմատիկայի հիմնարար հասկացության՝ թվի ներմուծման անհրաժեշտությունը և ուսուցումը, օրինակ, չափազանց դժվար իրականանալի գործընթացներ են, և հասկանալի են դառնում առաջին հերթին իրենց կիրառությունների

շնորհիվ: Ասվածը վերաբերում է ինչպես տարրական դպրոցում առարկաների հաշվման և համարակալման միջոցով բնական թվի ներմուծման, այնպես էլ բարձր դասարաններում թվի գաղափարի ավելի բարդ կիրառություններին: Եվ նման կիրառությունները նպաստում են նյութի յուրացման արդյունավետությանը, քանի որ բարդը պարզին հանգեցնելու գործընթացներ են:

Բարդը պարզին հանգեցնելու գեղագիտական հատկանիշը լայնորեն է դրսևորվում մաթեմատիկական թեորեմներում և դրանց ապացուցումներում: Մաթեմատիկական թեորեմի յուրաքանչյուր կիրառություն արդեն բարդի հանգեցումն է պարզին: Ինչպե՞ս հաշվել, օրինակ, այնպիսի մի բարդ մարմնի ծավալը, ինչպիսին կոնն է: Առաջին հայացքից այս դժվար իրականացվելիք գործընթացը մաթեմատիկական հնարքների միջոցով հանգեցվում է $V = \frac{1}{3}\pi R^3$ պարզ բանաձևին: Եվ գեղեցիկը այստեղ ոչ միայն բանաձևի պարզ տեսքն է, այլև նրա կիրառության հնարավորությունները:

Բարդը պարզին հանգեցնելու հրաշալի դրսևորում է մակերեսների հաշվումը երկրաչափության դասընթացում: Դիտարկենք օրինակ, եռանկյան մակերեսի վերաբերյալ թեորեմը և նրա ապացուցումը: Ուղղանկյան մակերեսը ստանալու համար անհրաժեշտ չափման միավորը՝ տրված քառակուսին, նրա տասնորդական, հարյուրերորդական, հազարերորդական և այլ մասերը տեղավորում ենք ուղղանկյան մեջ և այսպես՝ բարդը պարզին հանգեցնելու հաջորդական քայլերի միջոցով ստանում համապատասխան արդյունքը. ուղղանկյան մակերեսը հավասար է նրա երկու չափումների արտադրյալին:



Իսկ ինչպե՞ս վարվել եռանկյան դեպքում: Առաջին հայացքից խնդրի լուծումը անհնար է թվում, որովհետև եռանկյունը ոչ մի կերպ հնարավոր չէ ծածկել բառակուսիներով ինքան էլ որ վերջիններս փոքրացնենք: Բայց ահա կատարում ենք զարմանալի մի քայլ. ոչ թե ուղղանկյունն ենք տեղավորում եռանկյան մեջ, այլ

եռանկյունն ենք ընկղմում ուղղանկյան մեջ, ինչպես կատարված է գծագրում (տես գծ): Հասկանալի է, որ անսպասելի և նաև անկանխատեսելի այս քայլը (համապատասխան գեղագիտական հատկանիշների առկայությունը) էականորեն մեծացնում է խնդրի լուծման գեղագիտական գրավչությունը:

Գծագրից երևում է, որ α եռանկյունը հավասար է β եռանկյանը, իսկ γ -ն՝ δ -ին: Բայց տրված եռանկյան մակերեսը հավասար է α -ի և β -ի միավորմանը, իսկ ուղղանկյունը՝ α , β , γ և δ եռանկյունների գումարին: Հետևաբար, եռանկյան մակերեսը հավասար կլինի ուղղանկյան մակերեսի կեսին: Մյուս կողմից, ուղղանկյան մակերեսը հավասար է նրա երկու չափումների արտադրյալին: Չափումներից մեկը տրված եռանկյան հիմքն է, իսկ մյուսը հավասար է եռանկյան բարձրությանը: Ստացվեց, որ եռանկյան մակերեսը հավասար է նրա հիմքի և բարձրության արտադրյալի կեսին: Այսպիսով, այստեղ վերջին դատողության ապացուցումը հանգեցրինք բավականին պարզ դատողությունների շղթայի, այսինքն՝ բարդը հանգեցվեց պարզի կամ պարզերի: Եթե որևէ մեկին այդ դատողությունները կարող են բարդ թվալ, ապա կարելի է կատարել հետագա պարզեցում:

Դասավանդման մեթոդիկան, դասագրքերը, ուսուցչի վարպետությունը պետք է նպատակաուղղված լինեն «բարդի հանգեցումը պարզին» գեղագիտական հատկանիշի և մանկավարժական այս կարևոր բանաձևի իրականացման լավագույն ճանապարհների որոնմանը և հայտնաբերմանը, բանաձև, որի իրագործումն ապահովում է ինչպես դասի արդյունավետության, այնպես էլ ուսուցանվող մաթեմատիկական նյութի գեղագիտական գրավչության բարձրացումը:

**§5. ԳԵՂԵՑԻԿԻ ԱՐՏԱՔԻՆ ԵՎ ՆԵՐՔԻՆ
ԴՐՍԵՎՈՐՈՒՄՆԵՐԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՒՍՈՒՅՄԱՆ
ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՈՒՄ**

Մարդու մեջ ամեն ինչ պետք է լինի գեղեցիկ և՛ դեմքը, և՛ հագուստը, և՛ հոգին, և՛ մտքերը:

Անտոն Զեխով

**1. Գիտական գեղեցիկի արտաքին դրսևորումները մաթեմատիկայի
ուսուցման գործընթացում**

Մաթեմատիկական գեղեցիկի արտաքին և ներքին դրսևորումներն ի հայտ են գալիս մաթեմատիկայի ուսուցման ողջ գործընթացում: Եվ եթե բուն մաթեմատիկայում գերիշխում են գեղեցիկի ներքին դրսևորումները, ապա ուսուցման գործընթացում առաջին պլան է մղվում նաև գեղեցիկի արտաքին կողմը:

Նախ հարկ է նշել, որ մաթեմատիկայի արտաքին գեղագիտությունը մեծապես ընդլայնվում է, եթե ուսումնական նյութի մեջ ներառվում են համաչափության, համեմատության ու ոսկե հատման, ռիթմի և ներդաշնակության հետ առնչվող հարցեր: Մաթեմատիկական գեղեցիկի արտաքին դրսևորման լայն հնարավորություններ կարող են ընձեռել նաև գիտական գեղեցիկի հստակության, պարզության, կիրառելիության և գիտական օրինաչափության մաթեմատիկական գրառման օբյեկտիվ հատկանիշները:

Դժբախտաբար, մաթեմատիկայի հանրակրթական ծրագրերը և դրանց հիման վրա գրված դասագրքերը չեն ուղղորդվում արտաքին գեղեցիկը պայմանավորող այս հարցերի լուծմանը:

Մաթեմատիկական օբյեկտների արտաքին գեղագիտությանը հանգամանորեն անդրադարձել է Ն. Վ. Գուսյեվան: Նա մաթեմատիկական օբյեկտների արտաքին գեղագիտությունը հանգեցնում է մաթեմատիկական օբյեկտների երկրաչափական ձևերի և անալիտիկ գրառման: Երկրաչափական ձևերի գեղագիտության մեջ առանձնացնում է երկրաչափական գծերը, բազմանկյունները և բազմանիստերը, իսկ անալիտիկ գրառումների գեղագիտության մեջ՝ մաթեմատիկական օբյեկտների գրառման, մա-

թեմատիկական խնդիրների լուծման գրառման և մաթեմատիկական նյութի առանձին հատվածների ձևակերպման կամ ձևավորման գեղագիտությունը (տես [86], էջ 74, 84):

Կանգ չառնելով նման դասակարգման նպատակահարմարության և նրա առանձին կետերի իրագործման խնդիրների վրա (չգիտես ինչու, օրինակ, Ն. Վ. Գուսյեվան շրջանագիծը մտցնում է գծերի դասի մեջ, իսկ բազմանկյունը չի մտցնում կամ արտաքին գեղագիտականի դիրքերից հանգամանալից դիտարկելով կանոնավոր բազմանիստերը, ընդհանրապես չի անդրադառնում գնդի, գնդաձևի ու դրանց մասերի գեղագիտությանը), նշենք, որ առաջին հերթին երկրաչափական ձևերի գեղագիտությունը և դրա ներգործությունը սովորողների վրա պայմանավորված է դրանց գեղագիտական կամ ճշգրիտ պատկերումով: Եթե դասավանդվող նյութի մեջ խոսքը գնում է շրջանագծի մասին, ապա շրջանագիծ հիշեցնող մի անհրապույր կորի պատկերումը գրատախտակին չի կարող գրավիչ լինել՝ ձգել աշակերտին: Ես հիշում եմ, թե ինչպես հեռավոր այն ժամանակներում երկրաչափության գործնական պարապմունքները վարող մեր դասախոսը՝ կրթության երախտավոր Գևորգ Ղարազեբեկյանը հենց առաջին պարապմունքի ընթացքում կարողացավ նվաճել իր ուսանողների միտքը և սիրտը՝ գրատախտակին վարպետորեն գծելով մի փառավոր շրջանագիծ: Դրանից հետո երկար ժամանակ բոլոր դասամիջոցներին մենք իրար հերթ չտալով աշխատում էինք մեր անդադար փորձերով ընդօրինակել, սովորել շրջանագիծը պատկերելու մեր ուսուցչի վարպետությունը, իսկ նրա հերթական դասերին անհամբեր սպասում էինք նրա գեղեցիկ շրջանագծերին, որ հայտնվում էին գրատախտակին դրանք ստեղծող ձեռքի և դաստակի հոյակապ պտույտների համադրությամբ:

Նույն խնդրի լուծման շրջանակներում է նաև գրաֆիկների պատկերման մշակույթը: Փորձը ցույց է տալիս, որ ուսուցչության ճնշող մեծամասնությունն անհրաժեշտ պատասխանատվությամբ չի մոտենում դրանց պատկերման խնդրին: Գրաֆիկները կառուցվում են անփույթ, հաշվի չի առնվում այն, որ կոորդինատական առանցքներն ունեն չափման միևնույն միավորը, ուշադրություն չի դարձվում դրանց հետ ֆունկցիայի գրաֆիկի հատման կետերի համեմատաբար ճիշտ պատկերման և այլ խնդիրների վրա: Արդյունքում, մի կողմից ստացվում են գեղագիտական պահանջներից հեռու պատկերներ, իսկ մյուս կողմից, ստացված պատկերները հնարավորություն չեն տալիս պատասխանել այն հար-

ցերին, որոնց պատասխանները գտնելու համար դրանք կառուցվում են: Աշխատանքային մեծ փորձ ունեցող ուսուցիչներից մեկը, օրինակ, գիտամեթոդական մեր սեմինարում $y = \sin 2x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելիս ոչ միայն չէր պահպանել π և 1 , այլև π և $\pi/2$ թվերի մոտավոր համամասնությունը:

Հարկ է նկատել նաև, որ մաթեմատիկական արտահայտությունների և բանաձևերի արտաքին գեղագիտության տեսակետից մեծ դեր ունի դրանց կիրառելիությունը, ինչին մենք կանդրադառնանք ստորև:

2. Գիտական գեղեցիկի ներքին դրսևորումները մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում

Անդրադառնալով հանրակրթական դպրոցի 5-6-րդ դասարանների մաթեմատիկայի դասընթացում դիտարկվող օբյեկտների ներքին գեղագիտությանը, Ն. Վ. Գուսյեվան [86] որպես այդպիսիք առանձնացնում է թվային հատկությունները, թվային առնչությունները և թվային օրինաչափությունները: Անշուշտ, դժվար է տարբերել հատկությունը օրինաչափությունից կամ ինչու է առնչության ընդհանրական հասկացությունը, նրա պատկերումը արտահայտում օբյեկտի միայն ներքին գեղագիտությունը, երբ կարող է ունենալ միանգամայն արտահայտիչ արտաքին տեսք: Հասկանալի է այստեղ հեղինակի հնարավորությունների սահմանափակությունը՝ կապված կրթական մի ոչ մեծ փուլի (5-6-րդ դասարաններ) ուսումնասիրության հետ:

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում նրա օբյեկտների ներքին գեղագիտությունը դսևորվում է ուսուցման բոլոր փուլերում: Եվ բոլոր այդ փուլերում ներքին գեղագիտությունն արտահայտվում է մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշներով:

Հասկացությունների ուսուցման պարագայում որպես ներքին գեղագիտություն կարող են հանդես գալ հասկացության ներմուծման անհրաժեշտության, այսինքն՝ մոտիվացիայի, մաթեմատիկական օբյեկտներում և պրակտիկայում դրա կիրառական նշանակության համակողմանի բացահայտումը:

Որպես հասկացության գեղագիտության դրսևորման հատկանիշներ կարող են հանդես գալ հստակության, ինքնատիպության, բազմազանությունների միասնության և ընդհանրականության, կարգի, համաչափու-

թյան, համեմատության, ռիթմի, ներդաշնակության, օպտիմալության, օգտակարության և կիրառելիության օբյեկտիվ հատկանիշները: Նույն գործընթացում կարող են հանդես գալ նաև մաթեմատիկական գեղեցիկի անսպասելիության, առարկայի էությունը հասկանալու համար ներդրված ջանքերի, խաղի, ինտելեկտուալ որոնման սուբյեկտիվ հատկանիշները:

Թեորեմների ուսուցման գործընթացի ներքին գեղագիտությունը բացահայտելու համար անհարժեշտ է թեորեմը դիտել որպես ինչ-որ հասկացության հատկություն կամ էլ տարրեր հասկացությունների միջև ներքին կապի արտահայտություն Այդ դեպքում ստացված գեղագիտության գրավչությունը պայմանավորված է մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշներով: Թեորեմների մաթեմատիկական և պրակտիկ կիրառությունները նույնպես դրանց ներքին գեղագիտականի դրսևորումներ են:

Մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին գեղագիտությունը իր ողջ փայլով ու խորությամբ է դրսևորվում մաթեմատիկական ապացուցումներում. իզուր չէ, որ ամերիկացի հայտնի մաթեմատիկոս և մանկավարժ Պոլ Լոկհարդը մաթեմատիկան անվանում ապացուցումների արվեստ (տես [131]): Յուրաքանչյուր թեորեմի ապացույցում օգտագործվող փաստարկումները, դրանց կուռ հաջորդականությունը՝ իրարից բխելու արվեստով շաղկապված քայլերի համապատասխան շղթան չի կարող գեղագիտական հաճույքի պատճառ չդառնալ: Երբեմն, այդ շղթայի առանձին քայլեր կամ օղակներ ստացվում են մարդկային մտքի հիասքանչ փայլատակումների ու խորաթափանց մտահղացումների արդյունքում, որոնց զուգահեռը դժվար է պատկերացնել մարդու հուզագգացմունքային ոլորտում: Իզուր չէ, որ քսաներորդ դարի մեծագույն մաթեմատիկոսներից մեկը՝ Անդրե Վայլը մարդկային մտքի նման հանճարեղ փայլատակումներից մեկի մասին ասել է. մարդու կողմից երբեւ ստեղծած ամենահանճարեղ ստեղծագործությունը հավանաբար Էվարիստ Գալուայի տասը էջից բաղկացած ձեռագիրն է: Իսկ քսանմեկամյա այդ պատանու ստեղծածը, որ հետագայում անվանվեց իր անունով՝ Գալուայի տեսություն, խորքային աներևակայելի կապ էր հաստատում իրարից շատ հեռու և տվյալ ժամանակների համար դժվար ընկալելի հասկացությունների միջև, ինչը զարմանալի էր նաև նրանով, որ մաթեմատիկական ճշմարտությունը պայմանավորում էր նաև նրա գեղեցկությամբ:

Անշուշտ, հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացը չի կարող մաթեմատիկական գաղափարների, դրանց իրականացման, ա-

պացուցումների այդպիսի խորքեր ներկայացնել: Մակայն այստեղ նույնպես ապացուցումները, ինչպես նաև ապացուցման մեթոդները կարող են աչքի ընկնել իրենց գեղագիտական գրավչությամբ, քանի որ դրանք ուղեկցվում են մաթեմատիկական գեղեցիկի՝ տրամաբանական խստության, համաչափության, համեմատության, ներդաշնակության օբյեկտիվ հատկանիշներով, իսկ դրանց ուսուցումը հնարավոր է ուղեկցել մաթեմատիկական գեղեցիկի այնպիսի սուբյեկտիվ հատկանիշներով, ինչպիսիք են առարկայի էությունը հասկանալու համար ներդրված ջանքերը, նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարումը, ինտելեկտուալ որոնումը, գտնելը, հայտնագործելը:

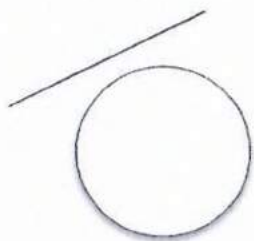
Մաթեմատիկական գեղեցիկի ներքին դրսևորման կարևոր աղբյուր են հանդիսանում նրա խնդիրները: Եվ շատ հետազոտողներ մաթեմատիկայի գեղագիտականը հիմնականում առնչում են հենց խնդիրների հետ: Այստեղ, որպես ներքին գեղագիտության դրսևորվում կարող են ծառայել մաթեմատիկական գեղեցիկի օպտիմալության, օգտակարության, կիրառելիության օբյեկտիվ հատկանիշները և անսպասելիության, անկանխատեսելիության, առարկայի էությունը հասկանալու համար ներդրված ջանքերի, նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարման, ինտելեկտուալ որոնման, գտնելու, հայտնագործելու սուբյեկտիվ հատկանիշները:

3. Մաթեմատիկական օբյեկտների արտաքին և ներքին գեղագիտությունների կապը

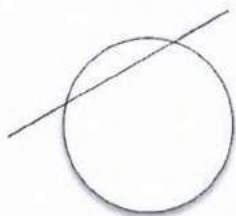
Այս աշխատանքի առաջին մասում ցույց տրվեց մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտության փոխկապակցվածությունը: Մենք փորձեցինք համոզվել, որ դրանցից յուրաքանչյուրի գեղեցկությունը պայմանավորված է մյուսի գեղեցկությամբ: Մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտությունների այս փոխկապակցվածությունը դրսևորվում է նաև մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում, նրա դասավանդման բոլոր փուլերում: Բայց հարկ է նշել, որ դրանցից յուրաքանչյուրի հանդես գալու հնարավորությունը կապված է սովորողների տարիքային առանձնահատկությունների հետ. ցածր դասարաններում, որտեղ գերիշխում է սովորողների պատկերային մտածողությունը, նշանակալից դեր է խաղում մաթեմատիկական օբյեկտների

արտաքին գեղագիտությունը: Հետագայում, տրամաբանական մտածողության ձևավորման և զարգացման հետ զուգընթաց, սկսում է հանդես գալ և աստիճանաբար ավելի նշանակալից դեր է կատարում օբյեկտների ներքին գեղագիտությունը: Հասկանալի է, որ մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացում նախ դրսևորվում է օբյեկտի արտաքին գեղագիտությունը, այնուհետև՝ ներքինը, և դրանք փոխընդհանուր են իրար:

Դիտարկենք նման մեկ օրինակ միջին դպրոցի երկրաչափության դասընթացից: Այս օրինակը կարելի է վերնագրել նաև շրջանագծի և քառանկյան փոխդասավորության գեղեցկությունը կամ դրանց «սերը»:



Գծ. 1ա



Գծ. 1բ

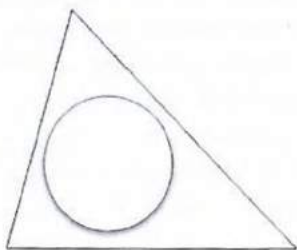


Գծ. 1գ

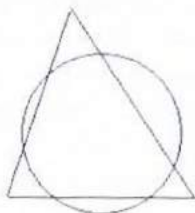
Նախ դիտարկենք ուղղի և շրջանագծի փոխդասավորության երեք հնարավոր դեպքերը. գծագիր 1ա-ում ուղիղը շրջանագծի հետ չունի ընդհանուր կետ, 1բ-ում ունի երկու ընդհանուր կետ. այն հատում է շրջանագիծը, իսկ 1գ-ում ունի մեկ ընդհանուր կետ. այն շոշափում է շրջանագիծը: Այս փոխդասավորություններից ո՞րը համարենք գեղեցիկ կամ գրավիչ: Անշուշտ խոսքն այստեղ առայժմ արտաքին գեղեցկության մասին է:

Այս հարցը առաջադրել եմ ուսանողների տարբեր սերունդների և միշտ ստացել եմ նույն պատասխանը. բոլորը գեղեցիկ են համարում 1գ-ում պատկերված փոխդասավորությունը: Ես դա չեմ վիճարկել ու հիմա էլ համոզված լինելով, որ ընթերցողը նույն կարծիքին է, չեմ վիճարկում: Չեմ էլ ուզում քննարկել նման մոտեցման պատճառը: Չնայած, հարկ է նկատել, որ նման քննարկումը շատ հետաքրքիր է անցնում և ուսանելի է սովորողների գեղագիտական ունակությունների զարգացման տեսակետից: Իմ խոսքը պատկերավոր դարձնելու և սովորողների հետաքրքրությունը նրա նկատմամբ մեծացնելու նպատակով, ես այդ դեպքում ասում եմ, որ շրջանագիծը և ուղիղը «սիրում» են իրար:

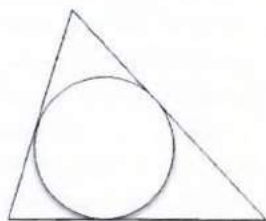
Այժմ ուզում եմ դիտարկել նաև շրջանագծի և եռանկյան հետևյալ փոխադասավորությունները.



Գծ. 2ա

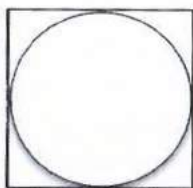


Գծ. 2բ

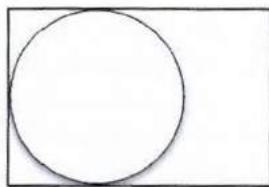


Գծ. 2գ

Այստեղ էլ իմ ուսանողները գրավիչ են համարում 2գ փոխադասավորությունը, ինչը արդեն հեշտությամբ է բացատրվում, այն հանգում է նախորդ խնդրում ուղղի և շրջանագծի փոխադասավորության գրավչությանը: Իսկապես, եռանկյան կողմերը ուղղի մաս են կազմում, որոնք բոլորը 2գ-ում շոշափում են շրջանագիծը, ինչը գրավիչ էր նախորդ գծագրերի մեջ: Դժվար չէ նկատել, որ յուրաքանչյուր եռանկյան համար կա մի շրջանագիծ, որը «սիրում» է այդ եռանկյանը, այսինքն՝ եռանկյան բոլոր երեք կողմերն էլ շոշափում են այդ շրջանագծին: Մաթեմատիկայում այդ շրջանագիծը կոչվում է եռանկյանը ներգծված շրջանագիծ. նրա կենտրոնը գտնվում է եռանկյան ներքին անկյունների կիսորդների հատման կետում, իսկ շառավիղը հավասար է կենտրոնից մինչև որևէ կողմ եղած հեռավորությանը (ակնհայտ է, որ այդ հեռավորությունները բոլոր կողմերի համար նույնն են):



Գծ. 3ա



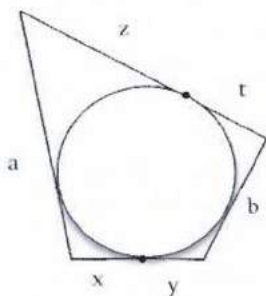
Գծ. 3բ

Այժմ համանման խնդիր դիտարկենք քառանկյան համար: Նախ, արդյո՞ք յուրաքանչյուր քառանկյունը կարող է «սիրվել» ինչ-որ շրջանագծի կողմից: Մաթեմատիկայի լեզվով սա նշանակում է, թե արդյո՞ք յուրաքանչյուր քառանկյան կարելի է ներգծել շրջանագիծ:

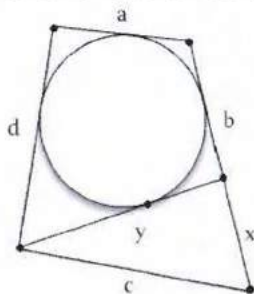
Հասկանալի է, որ քառակուսուն միշտ կարելի է ներգծել շրջանագիծ (տես գծ. 3ա), իսկ ուղղանկյանը, որը քառակուսի չէ, հնարավոր չէ ներգծել շրջանագիծ (տես գծ. 3բ): Այժմ շատ բնական է թվում հետևյալ հարցադրումը, որ վերաբերում է շրջանագծի և քառանկյան փոխդասավորության արտաքին գրավչությանը:

Ո՞ր քառանկյուններն են, որ կարող են «սիրվել» շրջանագծերի կողմից կամ մաթեմատիկական ձևակերպմամբ՝ ո՞ր քառանկյուններին կարելի է ներգծել շրջանագիծ:

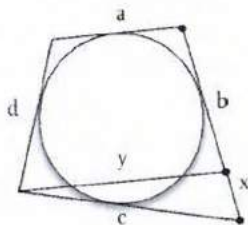
Հասկանալի է, որ այս հարցին արդեն գեղագիտականի արտաքին կողմը չի կարող պատասխանել, և մենք ստիպված ենք դիմել մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին գեղագիտությանը: Ենթադրենք տրված քառանկյանը արդեն ներգծված է շրջանագիծ այնպես, ինչպես պատկերված է գծ. 4ա-ում: Գծագրից և տրված կետից շրջանագծին տարված երկու շոշափող հատվածների հավասարության հատկությունից նախ հետևում է, $a=x+z$, $b=y+t$ և, ուրեմն, $a+b=(x+y)+(z+t)$, ինչը նշանակում է, որ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի գումարները նույնն են: Այսինքն, եթե քառանկյանը հնարավոր է ներգծել շրջանագիծ, ապա անպայման այդ քառանկյան երկու գույգ հանդիպակաց կողմերի գումարները նույնն են:



Գծ. 4ա



Գծ. 4բ



Գծ. 4գ

Իսկ միգուցե քառանկյան հենց այդ հատկությունն է նրա շրջանագծով ներգծելիության պատճառը: Փորձենք քննարկել այդ վարկածը: Դիցուք քառանկյան հանդիպակաց կողմերի գումարները իրար հավասար են,

այսինքն՝ $a+c = b+d$: Փորձենք ցույց տալ, որ նրան կարելի է ներգծել շրջանագիծ: Կամայական քառանկյան համար կարելի է տանել նրա երեք կողմերը շոշափող շրջանագիծ. դրա համար բավական է գտնել նրա երկու հարևան անկյունների կիսորդների հատման կետը, որը կլինի նշված շրջանագծի կենտրոնը: Եթե մեր քառանկյան համար տանենք այդպիսի շրջանագիծ, ապա այն կամ կշոշափի քառանկյան չորրորդ կողմը, այսինքն՝ կընդունի զծ. 4ա տեսքը, կամ կընդունի զծ. 4բ-ի, կամ էլ զծ. 4գ-ի տեսքը: Օգտվելով տրված պայմանից և արդեն մեզ հայտնի այն փաստից, որ ներգծելի լինելու դեպքում քառանկյան հանդիպակաց գույգ կողմերի գումարները նույնն են, և՛ զծ. 4բ-ի և՛ զծ. 4գ-ի դեպքում կստանանք $a+c=d+b+x$, $a+y=d+b$, որտեղից էլ կունենանք $x+y = c$ բանաձևը, ինչը կեղծ է, քանի որ x -ը, ինչպես նաև y -ը և c -ն միևնույն եռանկյան կողմերի երկարություններ են: Ուրեմն, մնում է, որ տեղի ունենա շոշափման դեպքը:

Այսպիսով, շրջանագծի և քառանկյան արտաքինից գեղեցիկ թվացող փոխդասավորությունը բնութագրվում է նաև համապատասխան հասկացությունների միջև ներքին գեղեցիկ կապի առկայությամբ, և հակառակը՝ ներքին գեղեցիկ կապով բնութագրվող շրջանագծի և քառանկյան փոխդասավորությունը ունի նաև գեղագիտական արտաքին գրավչություն:

§6. ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԸ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ

Տեսնելով վեհը, մարդը դառնում է ազատ, վստահ, լայնախոհ, հանգիստ, ուրախ, իսկ կատարյալ գեղեցիկը ցնցում է նրան իր տեսքով և թևաթափ է անում. նրա առաջ մարդը բացասում է ինքն իրեն:

Ֆրիդրիխ Նիցշե

1. Գեղագիտական արժեքներ

Ինչպես նշվեց առաջին պարագրաֆում, գեղագիտական դաստիարակության հիմնական գործառույթներից մեկը սովորողի արժեհամակարգի և արժեքային կողմնորոշման գեղագիտական բաղադրիչի ձևավորումն է:

Արժեքը «կամայական բնույթի առարկա է, որը նշանակալից է սուբյեկտի համար, օժտված է սուբյեկտի պահանջմունքները բավարարելու ունակությամբ» (տես [148], էջ 799): Արժեք ասելով մենք հասկանում ենք այն օբյեկտը, ինչը գնահատում ենք, նշանակալից ենք համարում, ինչը անհրաժեշտ է մեր պահանջմունքների բավարարման համար: Սովորաբար որպես արժեք է դիտվում նաև այն հատկությունը, որով օժտված է արժևորվող օբյեկտը և որը առանձնացվում, պատճառ է դառնում սուբյեկտի կողմից օբյեկտի արժևորման:

Արժեքների հիմքում ընկած են մարդկային պահանջմունքները: Կախված սուբյեկտի պահանջմունքներից՝ առանձնացվում են նյութական և հոգևոր արժեքները: Վերջիններիս մեջ էլ ինտելեկտուալ և բարոյական արժեքների հետ միասին դիտարկվում են գեղագիտական արժեքները: Եթե դիմենք արժեքի՝ որպես առարկաների հատկություն ընկալմանը, ապա գեղագիտական հիմնական արժեքները կլինեն գեղեցիկը և տգեղը, վեհը և ստորը, կատակերգականը և ողբերգականը: Այս հատկություններով օժտված և գնահատվող առարկաները նույնպես սուբյեկտի համար ունեն համապատասխան եզրույթով բնորոշվող գեղագիտական արժեք:

Մեծ է գեղագիտական արժեքների դերը մարդու կյանքում. դրանք նշանակալից են դարձնում մարդու կյանքը: Իսկապես, ժամանակակից մարդը անբաժան է գեղեցիկից. մարդու կենցաղում օգտագործվող ամենապարզագույն իրերից մինչև նրա բնակարանը, փողոցը, քաղաքը, երկի-

րը բնորոշող կարևորագույն արժեքներից մեկը գեղեցիկն է: Գեղեցիկով կարող է բնորոշվել բնության տեսարանը, սիրած աղջիկը, իր հայրենիքը պաշտանող զինվորը... Ուրիշին դուր գալու ձգտումը նույնպես ստիպում է աղջկան գեղեցիկ երևալ. նա ընտրում է գեղեցիկ շորեր, երկար կանգնում է հայելու առջև, սանրում է մազերը ու նայում իր գեղեցիկ աչքերին...: Եվ իր ընտրությունը կատարելիս մարդը միշտ առաջնորդվում է նաև գեղեցիկով:

Գեղեցիկի դրական արժեքի հետ միասին մարդու կյանքում հանդես է գալիս բացասական գեղագիտական արժեքը՝ տգեղը: Առանց տգեղի գեղեցիկը չի երևա, նշանակալից չի դառնա: Կանտը ասում է, որ եթե չկա համեմատությունը՝ այլ կին, ապա ցանկացած՝ թեկուզ և ամենատգեղ կին, եթե բնական արատ չունի, ժամանակի ընթացքում կարող է գեղեցիկ երևալ տղամարդու աչքին:

Գեղագիտական կարևոր արժեքներ են նաև վեհը, սարսափելին, ստորը, ողբերգականը, կատակերկազականը, որոնք մեծ դեր են խաղում մարդու կյանքում:

Գեղագիտական արժեքները ավելի նշանակալից են դառնում դրանց առարկայական բնույթի մեջ: Հենց իրականության առարկաներն են, երեվույթները, որոնք օժտված լինելով գեղագիտական այս կամ այն հատկությամբ, ձեռք են բերում գեղագիտական արժեք և դառնում են նշանակալից մարդու համար: Այս տեսակետից գեղագիտական արժեքները ընկած են արվեստի, նրա բոլոր տեսակների հիմքում: Ավելին՝ դրանց բացահայտումը արվեստի նպատակն է: Եվ պատահական չէ, որ արվեստի գործը՝ երգը, երաժշտությունը, գեղանկարը, քանդակը, թատերական ներկայացումը, կինոնկարը սովորաբար մենք բնութագրում ենք նաև այդ արժեքներով:

Գեղագիտական արժեքների դերը չի սահմանափակվում միայն արվեստով. դրանք դրսևորվում են կենսագործունեության բոլոր ոլորտներում. գեղեցիկ կամ տգեղ կարող է լինել մարդու վարքը, միտքը, խոսքը, նրան շրջապատի առարկաներն ու երևույթները:

Գեղագիտական արժեքները իրենց դերն ունեն նաև գիտության մեջ, մասնավորապես, մաթեմատիկայում: Մաթեմատիկական գործունեությունից անբաժան են «գեղեցիկ թեորեմ», «գեղեցիկ խնդիր», «գեղեցիկ ապացուցում», «գեղեցիկ լուծում» և նմանատիպ գեղագիտական այլ բնութագրումներ: Ավելին, ինչպես նշում է կիբեռնետիկայի հիմնադիրներից մեկը՝ Ջ. ֆոն Նեյմանը, մաթեմատիկական բոլոր ժամանակներում զարգացել

է հիմնականում գեղագիտական մոտիվների շնորհիվ: Որպես ֆոն Նեյմանի այս տեսակետի հաստատում, տեղին է նշել, որ դժվար է մաթեմատիկայի և, հավանաբար, գիտության պատմության մեջ գտնել դեպք, երբ մեծի, հանճարեղի ծնունդը պայմանավորված է եղել մանկության և պատանեկության տարիներին ուրիշների կողմից նրանց համառ աշխատանքի պարտադրումով: Այնինչ, արվեստում, մանավանդ նրա կատարողական բնագավառում, նման պարտադրանքները շատ շատ են եղել և, հավանաբար, առանց նման պարտադրանքների չէին ծնվի կատարողական արվեստի հանճարները:

Գեղագիտական արժեքների ձևավորումը, դրանց ճանաչումը, «գեղեցիկով ապրելու» սովորույթի արմատավորումը գեղագիտական դաստիարակության կարևորագույն խնդիրներից մեկն է:

2. Գեղեցիկը, տգեղը և մաթեմատիկական կրթությունը

Այս աշխատանքի առաջին մասում մենք հանգամանորեն դիտարկել ենք գեղեցիկի արժեքը: Այստեղ ավելի շատ կանգ առնենք տգեղի վրա: Տգեղը կամ այլանդակը գեղեցիկի հակադրությունն է: Այն արտահայտում է բացասական գեղագիտական արժեք: Հին եգիպտացիները գեղեցիկը և տգեղը հակադրում էին իրար՝ նշելով, որ մարդու ծերանալուն գուզընթաց գեղեցիկը դառնում է տգեղ, առողջը՝ հիվանդ, լավը՝ դառնում է վատ, առարկան կորցնում է համը և այլն: Անտիկ Հունաստանի փիլիսոփաները տգեղը մոտեցնում էին չարին: Արիստոտելը նկատում է, որ արվեստի առարկան կարող է լինել և՛ գեղեցիկը, և՛ տգեղը: Բայց երբ տգեղը արդեն պատկերված է որպես արվեստի գործ, ապա այն գեղեցիկ է, քանի որ հնարավորություն է տալիս ճաշակել ճշմարտության իմացության ուրախությունը: «Այն, ինչին նայելը զգվելի է, նրա պատկերումը մենք դիտում ենք հաճույքով, ինչպես օրինակ, զգվելի կենդանիների և դիակների պատկերումը» (տես [45]):

Միջնադարյան փիլիսոփայության մեջ տգեղը մեկնաբանվում է որպես մեղավորության ձև և հետևանք: Տգեղը Սատանան է, տգեղը Ադամի և Եվայի արարքն էր, որ խախտելով Աստծո արգելքը, մեղք գործեցին և հիմք դրեցին տգեղին:

Գ. Լեսինգը գտնում է, որ եթե մարմնական գեղեցկությունը մարմնի տարբեր մասերի ներդաշնակ գույգորդման մեջ է, ինչը կարելի է նկատել

մի հայացքով, ապա տգեղը մասերի և ամբողջի աններդաշնակությունն է, որը նույնպես նկատվում է անմիջապես: Տգեղը արվեստի առարկա չէ և կիրառելի է միայն գեղեցիկից ստացված տպավորությունը ուժեղացնելու համար: Տգեղը, որպես գեղեցիկի հակադրություն, առարկաների, երևույթների գեղագիտական այնպիսի հատկությունն է, արժեքը, որն ունի բացասական նշանակություն: Այն վտանգ չի ներկայացնում, քանի որ նրանում ամփոփված ուժերը մարդու կողմից ճանաչված են և ենթարկվում են նրան: Տգեղը վանում է, բայց չի վախեցնում, այնինչ գեղեցիկը հաճույք է պատճառում անգամ իր տեսքով:

Ինչպես նշում է հանրահայտ մաթեմատիկոս Գ. Հարդին, «տգեղը մաթեմատիկայում տեղ չունի. աշխարհում չկա տգեղ մատեմատիկա» (տես [218]): Եվ չնայած Հարդիի այս մոտեցմանը, տգեղը, այնուամենայնիվ, որոշակի տեղ է զբաղեցնում մաթեմատիկական գործունեության մեջ: Երկարաշունչ, ոչ ռացիոնալ ապացուցումները, հասկացությունների և թեորեմների ոչ հստակ ձևակերպումները և տգեղի դրսևորման այլ արտահայտություններ հետազոտողներին ստիպում են գտնել նոր մոտեցումներ, մաթեմատիկական նյութի գեղեցիկ արտահայտման կամ ներկայացման նոր հնարավորություններ:

Ինչ վերաբերում է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացին, ապա այստեղ գեղեցիկն ու տգեղը ունեն նույնքան բազմազան և խորը դրսևորումներ, ինչքան մաթեմատիկայում: Մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշներին, մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտությանն այստեղ ավելանում են դասավանդման գործընթացի հետ կապված մի շարք գործոններ, որոնք գեղեցիկի մաթեմատիկական դրսևորումներին հաղորդում են լրացուցիչ երանգներ: Առաջիկայում մենք կտեսնենք, որ դրանք լայնորեն դրսևորվում են ոչ միայն մաթեմատիկական օբյեկտների, հասկացությունների, թեորեմների և նրանց ապացուցումների, խնդիրների և նրանց լուծումների ուսուցման, այլև մտածողության և ապացուցման մեթոդների կիրառության գործընթացում: Ինչպես յուրաքանչյուր գործընթացում, մաթեմատիկայի ուսուցման մեջ նույնպես կարող է երևան գալ տգեղը: Եվ ուսուցման խնդիրներից մեկը այդ տգեղի վերացումն է: Իսկ ո՞րն է տգեղը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի մեջ:

Մ. Ա. Ռոդիոնովը և Ե. Վ. Լիկսինան, խոսելով մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում տգեղի երևան գալու հնարավորությունների մասին, որպես դրանց դրսևորման աղբյուր նշում են «հասկացությունների և

թերեմների ձևակերպումներում հանդիպող սխալները, խնդրի պայմանների ոչ կոդեկտությունը, հաշվումներում թույլ տրված տրամաբանական սխալները, ոչ ռացիոնալ և մեծածավալ լուծումները, սխալ կամ «խցանված» գծագրերը» (տես [171], էջ 63):

Մեզ թվում է, որ ընդհանրապես այստեղ տգեղ պետք է համարել այն, ինչ ունի գեղեցիկով արտահայտվելու, գեղեցիկ դառնալու հնարավորություն, բայց այդպիսին չի դարձել: Դա առաջին հերթին վերաբերում է մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշներին. երբ համաչափը պատկերված է անհամաչափ, ներդաշնակը՝ աններդաշնակ, չի երևում երևույթում առկա ռիթմը, չեն պահպանված օբյեկտի մասերի համամասնությունները, բացակայում է խոսքի հստակությունը, պարզությունը և տրամաբանական խստությունը, երբ կայունը դառնում է անկայուն, բազմազանությունները ունեն միասնաբար հանդես գալու հնարավորություն, բայց երևում են միայն մեկուսի: Մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշների այս խախտումներից յուրաքանչյուրը արժանի է առանձին դիտարկման: Ի՞նչ արժե, օրինակ, անհստակ, անտրամաբանական խոսքը. նրա կրողի հետ անհնար է նորմալ գրույց վարել: Բանաստեղծական անուրանալի շնորհքով օժտված իմ ընկերներից մեկի հետ ես այսպիսի գրույց ունեցա: «Չես կարող հարգել ինքդ քեզ, եթե դիմացինդ քեզ չի հարգում», -ասաց նա: «Իսկ եթե դիմացինդ հիմարի մեկն է ու քեզ չի հարգում, դու է՞լ չպիտի քեզ հարգես», -հարցրեցի ես: «Իա, հիմարը ինչ գործ ունի ինձ հետ փոխհարաբերություններում», -ասաց իմ ընկերը: Իհարկե, նման գրույցը շարունակելն անիմաստ էր: Ընդհանրապես, անտրամաբանական խոսքը մարդ արարածի ամենատգեղ արտահայտություններից մեկն է, որի վերացմանը պետք է նպատակաուղղված լինի կրթությունը և առաջին հերթին՝ նրա կարևորագույն բաղադրիչներից մեկը՝ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը:

Նույնքան կարևոր է մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշների խախտումից առաջացած տգեղի դիտարկումը կամ վերացումը: Այստեղ տգեղ է, երբ ուսուցիչը նյութի շարադրանքը չի ուղեկցում անկանխատեսելիության և անսպասելիության կախարդանքով: Տգեղ է, երբ խնդրի լուծման համար աշակերտից պահանջվող ջանքերը չեն գործադրվում, երբ բարդ ու դժվարի խոչընդոտը չի հաղթահարվում կամքի թուլության պատճառով, երբ բացակայում է հետաքրքրությունը, ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացության, ինտելեկտուալ որոնման, գտնելու պահանջը, երբ աշակերտը գրկվում է նմանատիպ գործողությունների

արդյունքում զուտ մարդկային ոգուն հատուկ բերկրանքը ապրելու հնարավորությունից:

Տգեղը կարող է դրսևորվել նաև մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտությունը երևան չհանելու պատճառով: Ավելի դյուրին է նկատել տգեղը իր արտաքին դրսևորման մեջ, և ավելի դժվար նրա ներքին էության հայտնաբերումը: Հարկ է նկատել, որ այստեղ տգեղը խանգարում է ոչ միայն մաթեմատիկական նյութի գեղագիտական ընկալմանը, այլև բուն ճշմարտության բացահայտմանը: Երկրաչափական շատ խնդիրներ, օրինակ, դժվար է լինում լուծել, եթե պահանջվող գծագրերը ճիշտ չեն գծագրվում, չեն պահպանվում երկրաչափական պատկերների մասերի միջև համամասնությունները, իսկ հատույթների վերաբերյալ խնդիրներում պահանջվող հատույթների ոչ ճիշտ կամ տգեղ գծագրումը բացառում է խնդրի լուծումը և այլն:

3. Վեհը, ստորը և մաթեմատիկական կրթությունը

Վեհը: Վեհի մասին առաջին հիշատակությունները վերաբերում են մ.թ. առաջին դարին: Դրանք անանուն հեղինակների երկու աշխատանքներ են, որ հիմնականում նվիրված են ճարտասանական արվեստին: Առանձնահատուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում երկրորդը, որ պայմանականորեն վերագրվում է Կեղծ-Լոգինին: Ըստ հեղինակի, վեհը մարդուն բարձրացնում է մինչև աստվածային մեծության, պարզում է անմահություն: Մարդը չի կարող ունենալ վեհի զգացումը ոչ մեծ գետի տեսքից, ինչքան էլ դրա ջրերը պարզ, զուլալ ու օգտակար լինեն: Բայց նա զարմանում է տեսնելով Նեղոսը, Ամազոնը և, մանավանդ, օվկիանոսը: Ահա այդ երևույթներն են, որ կարելի է անվանել վեհ: Որպես վեհ կարելի է ընկալել նաև հրաբխի ժայթքումը և լեռնային գագաթների տեսքը (տես [160]):

Որպես ինքնություն կատեգորիա վեհը առաջին անգամ հանդես է գալիս 1757 թ. անգլիացի փիլիսոփա Է. Բերքի՝ վեհի և գեղեցիկի մասին աշխատության մեջ, որտեղ նա հակադրում է այդ կատեգորիաները: Նա կարծում է, որ դրանք իրարից այնքան տարբեր են, որ անհնար է միավորել մեկ ընդհանուր զգացմունքի մեջ (տես [47]):

Ի. Կանտը կատարում է նշված հակադրության մանրակրկիտ վերլուծություն: Եթե գեղեցիկը բնութագրվում է որոշակի ձևերի մեջ, դրանց սահմանափակությամբ, ապա վեհին հատուկ է անսահմանափակու-

թյունը, անվերջ մեծությունը և անչափելիությունը մարդկային հայեցողության և երևակայության հետ: Նա գտնում է նաև, որ «վեհը ոչ թե ինչ-որ բանի մեջ է, այլ մեր հոգում»: Այն մեկ ձգում է, մեկ վանում, չի տալիս դրական բավականություն, այլ առաջ է բերում զարմանք, հարգանք և բացասական բավականություն: Կանտը վեհ է համարում նաև մարդու հպարտությունը, որն առաջանում է վախի հաղթահարմամբ և հավատի առկայությամբ (տես [105]):

Ֆ. Շիլլերը հակադրում է վեհը գեղեցիկի հետ: Նա գտնում է, որ գեղեցիկը հաճելի զգացում է առաջացնում, իսկ վեհը՝ տհաճ զգացում, օրինակ՝ կայծակի որոտը, ամպրոպը (տես [235]):

19-րդ դարի ֆրանսիացի փիլիսոփաները վեհը մոտեցնում են գեղեցիկին: Ա. Սուրիոն գտնում է, որ վեհը գեղեցիկի բարձրագույն աստիճանն է, իսկ Բ. Լեվակը վեհ է համարում անսահման գեղեցիկը, որին անհնար է հասնել (տես [54]): Ըստ Գ. Հեգելի վեհի կերպարը ավելի հարազատ է պոեզիային և երաժշտությանը (տես [75]): Ն. Գ. Չերնիշևսկին գտնում է, որ վեհը բացահայտվում է շրջապատող երևույթների հետ համեմատության արդյունքում: Վեհը անհամեմատ մեծ և ուժեղ է բոլոր այն երևույթներից, որոնց հետ համեմատելի է: Վեհ է, օրինակ, հողմը՝ որ հարյուր անգամ ուժեղ է սովորական քամուց, սերը, որ ուժեղ է մանր հաշվարկներից (տես [229]):

Ն. Գարտմանը գտնում է, որ վեհը ճնշում է մարդուն, սարսափեցնում է նրան: Ընկալելով վեհը, հակադրվելով դրան, մարդը կարող է հաղթահարել իր աննշան լինելու զգացումը (տես [74]): Ըստ Կ. Գրոսսի՝ վեհը հզորն է պարզի մեջ:

Գեղագիտական մտքի պատմական թռուցիկ ակնարկից հետևում է երկու մոտեցում գեղեցիկի և վեհի փոխհարաբերության նկատմամբ.

- վեհը գեղեցիկի բարձրագույն աստիճանն է, նրա հատուկ տեսակը, որ առանձնանում է իր մեծությամբ և հզորությամբ:
- վեհը հակադիր է գեղեցիկին և նրա ընկալումը առաջացնում է բացասական գեղագիտական հակազդում:

Սովորաբար վեհը դիտվում է որպես մարդու կողմից լրիվ չգիտակցված առարկաների և երևույթների գեղագիտական դրական արժեք: Դրա գիտակցումը երբեմն անհաղթահարելի է կամ դժվար հաղթահարելի, այն աննվաճելի է կամ դժվար նվաճելի, և դրա հաղթահարումն ու նվաճումը մարդու առջև բացում է գեղեցիկի նոր հորիզոններ: Վեհի ընկալումը կարող է զուգորդվել ինչպես հիացմունքով, այնպես էլ բացասական

գեղագիտական զգացմունքով, անգամ՝ վախով: Եվ կախված առաջացած զգացմունքից, կախված նրանից, թե այն հիացմունք, թե վախ է առաջացնում, զանազանում են վեհի՝ մարդու հզորությունը բարձրացնող և նրան ճնշող տարատեսակները:

Երբ բնության հզոր երևույթը ներառվում է հասարակական հարաբերությունների մեջ, այն ստանում է վեհի արժեք: Իսկ երբ այն լիովին գիտակցվում և նվաճվում է մարդու կողմից և վերանում է նրա հանդեպ վախը, այն դառնում է արդեն գեղեցիկ: Այդ գեղեցիկը նպաստում է նաև բնության նոր երևույթների ճանաչմանը, վեհի նոր հորիզոնների բացահայտմանը, ինչը ենթադրում է մարդու անդադար, հետևողական ու ստեղծագործ աշխատանք: Նման աշխատանքի արդյունքում վեհի միջոցով գեղեցիկի ճանաչումը մարդուն պարզևում է գեղագիտական աննկարագրելի հաճույք:

Հասարակության մեջ վեհը տեխնիկական հսկա շինարարություններն են, որոնք արդյունք են ստեղծագործական հսկայածավալ աշխատանքի, հզոր սոցիալական շարժումների, որոնք ընդգրկում են մարդկային մեծ գանգվածներ: Դրանց չափերը և ծավալը հաճախ այնքան մեծ են լինում, որ դրանց լիարժեք իրականացումը կատարվում է միայն պատմական մի ամբողջ դարաշրջանի ընթացքում: Երբեմն նման երևույթների նշանակությունը լիարժեքորեն բացահայտվում է միայն մի քանի սերունդների կենսագործունեության ընթացքում:

Վեհը արվեստում դրսևորվում է վիթխարի, մասշտաբային և մոնումենտալ ձևերով: Եզիպտական բուրերը, որ աշխարհի յոթ հրաշալիքներից են, հաստատելով փարավոնների հզորությունը, ճնշում են մարդուն, հաստատում նրա ոչնչությունը բուրգերի մեծության և հավերժության համեմատությամբ, հանգամանքներ, որոնք դիտողի մոտ առաջացնում է վեհի զգացողություն: Վեհի այդ զգացողությունը ավելանում է օգտագործման համար բուրգերի աննպատակահարմարությունից եկող անմարդկային բնույթի հետևանքով:

Օլիմպիա քաղաքը անտիկ Հունաստանի մշակութային կենտրոններից մեկն էր. այստեղ անց էին կացվում աստվածների աստված Ջևսի պաշտմունքը արտահայտող միջոցառումներ, որոնց մեջ հիմնականը Օլիմպիական խաղերն էին: Մ.թ.ա 7-4-րդ դարերում այստեղ բարձրացվեցին ճարտարապետական կառույցներ, որոնց մեջ առանձնանում էր Ջևսի տաճարը, որի հեղինակը հանձարեղ Ֆիդասն էր: Տաճարի երկարությունը 64 մետր է, լայնությունը՝ 28 մետր, իսկ բարձրությունը՝ 20 մետր: Ջևսի 14

մետրանոց արձանը, որ զարդարված է ոսկով, փղոսկրով և թանկարժեք քարերով, բազմել է տաճարի վերջում տեղադրված գահին:



Ֆիդաս, Ջեսի արձանը, մ.թ.ա. 432 թ.,

Օլիմպոս, Հունաստան

Վեհի տպավորությունը հիմնականում առաջանում է Ջեսի արձանի և տաճարի չափերի հարաբերությունների արդյունքում: Դրանք ընտրված էին այնպես, որ եթե Ջեսը կանգնեք, ապա նրա գլուխը կկայներ տաճարի առաստաղին: Մինևուն ժամանակ հանճարեղ քանդակագործը արձանը այնպես էր քանդակել, որ տպավորություն էր ստեղծվում, թե ուր որ է Ջեսը կանգնելու է: Դա դիտողին լրացուցիչ անհանգստություն էր պատճառում և մեծացնում արձանից եկող վեհի զգացողությունը: Պատահական չէ, որ Ջեսի տաճարը նույնպես համարվում է աշխարհի յոթ հրաշալիքներից մեկը:

Միջին դարերի արվեստում վեհը նույնացվում էր Աստծո հետ և դիտարկվում էր որպես գեղագիտության և աստվածաբանության միջև ընկած միջանկյալ կատեգորիա, և գորական տաճարներում վեհը հանդես է գալիս որպես մարդկության հույս՝ ձգված առ Աստված: Թուլացած լուսավորությունը, գաղտնիությունը, ձգվածությունը դեպի երկինք ստեղծում են սովորականից հեռու և վեհի՝ միջնադարի պատկերացումների համապատասխան ոչ իրական միջավայր:

Վերածննդի շրջանի արվեստում վեհի արտահայտման համար բնութագրական են Միքելանջելոյի որոշ ստեղծագործություններ՝ Ահեղ դատասանը, ուր պատկերված է Քրիստոսի երկրորդ վերադարձը, Դավիդի քանդակը և այլն: Նոր ժամանակների արվեստում վեհը հրաշալի է դրսևորվում, օրինակ, Բեթհովենի մի շարք ստեղծագործություններում:



Գարավաջիո,

Պետրոս առաքյալի խաչելությունը, 1600-1601

Վեհը և մաթեմատիկական կրթությունը: Վեհը մարդու կյանքում խաղում է շատ ավելի փոքր դեր, քան գեղեցիկը, և մաթեմատիկայի հետ վեհի փոխհարաբերությունները նույնպես մեծ չեն: Այնուամենայնիվ, դրանք նկատելի են ինչպես բուն մաթեմատիկայում, այնպես էլ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում: Առաջին հերթին, վեհ է մաթեմատիկայի ճարտարապետական ողջ կառույցը: Այն արտահայտվում է ձևերի բազմազանությամբ ու միասնականությամբ, սահմանափակությամբ ու անսահմանափակությամբ, ընդհատությամբ և անընդհատությամբ, կատարելագործվելու, զարգանալու, ծավալվելու և ընդլայնվելու ունակությամբ, անվերջության ընդգրկման հնարավորություններով, զարգացման ընթացքում մասերի տարանջատման, հեռացման և հեռավորության մեջ նորից իրար մոտենալու, ընդհանուրը դրսևորելու միտումով, բնության, աշխարհակառույցին համապատասխանելու, դրանց օրենքները արտահայտելու հնարավորություններով, ճշամարտության բացահայտման կարողությամբ ու անկարողությամբ, ընկալման պարզությամբ և բարդությամբ, իր հավերժությամբ ...

Սակայն մաթեմատիկայի ճարտարապետության մեջ վեհի նման ընկալման կարելի է հասնել միայն պրոֆեսիոնալ մաթեմատիկական գործունեության արդյունքում: Մինչդեռ հանրակրթական դպրոցի աշակերտի կողմից մաթեմատիկայի ուսումնասիրությունը համապատասխան ուսումնական առարկայի շրջանակներում ոչ մի չափանիշով հնարավոր

չի այդպես գնահատել: Աշակերտների մի մասի մոտ թեպետ և առկա է մաթեմատիկայի նկատմամբ հարգանքը, բայց նրանք վախենում են դրանից: Այստեղ նրանց զգացումը, մոտ է վեհին, բայց շատ հեռու է աշակերտների այդ խմբի կողմից գիտակցվելուց, հակադիր է գեղեցիկին և առաջացնում է բացասական գեղագիտական հակազդում (այնպիսին, ինչպիսին կառաջացնելու ուժեղ փոթորիկը՝ նրա տիրույթներում հայտնված մարդու մոտ, կամ ավելո՞ծված ծովը՝ իր ալիքների մեջ ընկածի մոտ, կամ էլ առյուծը՝ նրա դեմ հայտնվածի մոտ): Աշակերտների մի այլ խմբի համար, որոնք հասկանում են մաթեմատիկան, այն կարող է մոտենալ վեհին, եթե վեհը դիտենք որպես գեղեցիկի բարձրագույն աստիճան:

Սակայն վեհի զգացումը կարելի է ունենալ նաև մաթեմատիկայի ընդհանուր ճարտարապետության շինանյութի՝ նրա առանձին տարրերի դիտարկումից, որոնք ճիշտ է, չունեն ընդհանուր կառույցի ճարտարապետական վեհությունն ամբողջությամբ, բայց կրում են դրա դրոշմը:

Վերցնենք թեկուզ ուղիղը: Այն առաջին հայացքից թվում է շատ պարզ, բայց բավական է նկատել, որ երկու կողմից անսահման շարունակվում է և առաջացնում է դժվար բացատրելի հարցադրումը՝ ի՞նչ է նշանակում դա: Այս շարքին են պատկանում նաև բնական թվերի անվերջության կամ, որ մի քիչ ավելի խորհրդավոր է, պարզ թվերի անվերջության հատկությունները: Բայց վերադառնանք ուղղին. այն անվերջ շարունակվում է, ձգտում է անվերջության ոչ միայն երկու կողմերից, այլև իր ցանկացած կետի շուրջ. ուղղի կամայական կետի ցանկացած շրջակայքում կան անվերջ թվով կետեր: Ավելին, ուղղի ցանկացած հատված պարունակում է այնքան կետ, ինչքան նրանից թեկուզ և շատ մեծ մի այլ հատված: Եվ դա դեռ բոլորը չէ. ուղղի ցանկացած հատված պարունակում է այնքան կետ, ինչքան ամբողջ ուղիղը: Ահա այստեղ կարելի է հիշել վեհին տված Կ. Գրոսի բնորոշումը՝ հզորը պարզի մեջ կամ, որ նույնն է՝ անչափ մեծը շատ փոքրի մեջ:

Իսկ ինչպե՞ս հաշվենք, օրինակ, շրջանագծի երկարությունը: Եթե մեկը մտածում է պարանը տեղավորել շրջանագծի երկարությամբ և, այնուհետև, այն բացելով, չափել նրա երկարությունը, ապա նա հեռու է մաթեմատիկական գործունեությունից. ստացված մոտավոր գնահատականը կլինի բազմաթիվ սխալների արդյունք, որ նա թույլ կտա պարանը տեղավորելու և բացելու արդյունքում, և ստացված պատասխանն էլ չի համապատասխանի ճշմարտության բացահայտման մաթեմատիկական չափանիշներին: Սա դեռևս Անտիկ Հունաստանում հասկացել է Պլատոնի աշա-

կերտ էվտոքսը, ով առաջարկել է շրջանագծի երկարության հաշվման այսօրվա մեթոդներին մոտիկ մոտեցում. անհամեշտ է շրջանագծին ներգծել կանոնավոր բազմանկյուն, որի պարագիծը մոտավորապես հավասար կլինի շրջանագծի երկարությանը: Այնուհետև բազմանկյան կողմերը կրկնապատկելով՝ կստանանք նոր կանոնավոր բազմանկյուն, որի երկարությունը ավելի մոտ կլինի շրջանագծի երկարությանը և այս գործընթացը շարունակելով, մենք ավելի ու ավելի և ցանկացած ճշտությամբ կմոտենանք շրջանագծի երկարությանը, բայց երբեք չենք ստանա այն: Հետագայում, արդեն նոր ժամանակներում, Ի. Նյուտոնի և Գ. Լայբնիցի կողմից դիֆերենցիալ հաշվի ստեղծումից հետո, հնարավոր դարձավ էվտոքսի մեթոդը զարգացնել և, կրկնապատկումների ընթացքը անվերջ շարունակելու միջոցով, ստանալ շրջանագծի ճշգրիտ երկարությունը: Իսկ անվերջ շարունակելու հնարավորություն տալիս էր դիֆերենցիալ հաշիվը:

Վերջավորից անվերջի անցման այդ ընթացքը, որ հատուկ է դիֆերենցիալ հաշվին, իր մեջ նույնպես պարունակում է վեհի հատկանիշներ: Սակայն պետք է նկատել, որ հանրակրթական դպրոցում, ինչպես այս հարցը, այնպես էլ ընդհանրապես դիֆերենցիալ հաշիվն ուսումնասիրելիս, սովորողները բավարարվում են ածանցման պարզագույն կանոնները անգիր անելով, ինչը նրանց հնարավորություն է տալիս պատասխանել միայն շտեմարանային հարցերի: Իսկ ածանցյալի (ինչո՞ւ միայն ածանցյալի) էությունը, նրա՝ որպես գեղեցիկի բարձրագույն հատկանիշ կամ որպես վեհ, ընկալումը դուրս է մնում սովորողների տեսադաշտից: Մինչդեռ ածանցյալի գաղափարը ի գործ է պատասխանելու այնպիսի նուրբ և դժվար հարցի, ինչպիսին, օրինակ, ողորկությունն է:

Պատմականորեն վեհի՝ որպես մաթեմատիկական դատողության առաջին դրսևորումը, հավանաբար, քառակուսու կողմի և անկյունագծի անհամաչափելիության փաստն է եղել, որ զարմացրել ու վախեցրել է Պյութագորին և պյութագորականներին: Մաթեմատիկական այդ մեծ երևույթը նրանք չեն կարողացել ընկալել, աշխատել են թաքցնել ուրիշներից, բայց, ի վերջո, իրենց մեծագույն հայտնագործությունը ընդունել են որպես մեծագույն պարտություն: Եվ պահանջվել են դարեր, որպեսզի մարդկային միտքը ի գործ լինի հաղթահարել և գտնել դրա բացատրությունը:

Կամ արագավազ Աբիլեսի ու կրիայի, նետի շարժման անհնարինության և Զենոնի մնացած ապորիաները: Դրանք մարդկային մտքի առջև

կանգնած և վեհին միտվող այնպիսի ստեղծագործություններ են, որոնք ժամանակ առ ժամանակ, մաթեմատիկայի զարգացմանը զուգընթաց, ստանում են որոշ, բայց ոչ լիարժեք բացատրություններ:

Վեհի մաթեմատիկական դրսևորման մեծագույն օրինակներից մեկը ստացվեց Էվկլիդեսի հինգերորդ աքսիոմի ու մնացած աքսիոմների հետ դրա փոխհարաբերության հարցի ուսումնասիրությունից: Իսկ հարցը հետևյալն է. արդյո՞ք հինգերորդ աքսիոմը հնարավոր չէ արտածել մնացածներից: Հազարամյակների ընթացքում այդ հարցը հուզել է մեծագույն մտածողներին, իսկ պատասխանը գտնվել է միայն տասնիններորդ դարում: Եթե մինչև այդ բոլոր հետազոտողները գնում էին Էվկլիդեսի մնացած աքսիոմներից այդ աքսիոմի արտածումը գտնելու ճանապարհով, ապա Ն. Լոբաչևսկին ու Յա. Պոլյային ցույց տվեցին, որ նման արտածում գոյություն ունենալ չի կարող, և ընտրելով հակառակ ճանապարհը, նրանք հասան մեծագույն հայտնագործության. Էվկլիդեսի հինգերորդ աքսիոմը անկախ է մնացածներից:

Սա հեղաշրջում էր մաթեմատիկայում, մտածողության նոր որակ. եթե զուգահեռության աքսիոմը անկախ է մնացած աքսիոմներից, ապա այն կարելի է ընդունել կամ չընդունել, ըստ այդմ՝ ստանալ Էվկլիդեսյան կամ ոչ Էվկլիդեսյան երկրաչափություն: Զարմանալին այն էր, որ ոչ Էվկլիդեսյան երկրաչափության մեջ տեղի էին ունենում Էվկլիդեսյան երկրաչափության ավանդույթներով ձևավորված մարդկային ինտուիցիայի համար դժվար ընկալելի, տարօրինակ երևույթներ. եռանկյան անկյունների գումարը կարող էր փոքր լինել 180 աստիճանից, կետից ուղղին կարելի էր իջեցնել մեկից ավելի ուղղահայացներ և այլն: Անշուշտ, դժվար էր համակերպվել իրերի նման ընթացքի հետ, և սկզբնական շրջանում Լոբաչևսկու-Պոլյայիի տեսությունը ընկալվում էր սոսկ որպես զուտ մաթեմատիկական ստեղծագործություն: Միայն հետագայում պարզվեց, որ ոչ Էվկլիդեսյան երկրաչափությունը (ինչպես և մաթեմատիկայում ամեն ինչ) ոչ միայն մաթեմատիկոսների մտքի խաղ է, այլև իրականության արտահայտման ձևերից մեկը և ունի ռեալ ու շատ կարևոր կիրառություն ֆիզիկայում:

Վեհի զգացմունքը զուգորդվում է մաթեմատիկայի զարգացման պատմության մեջ դարաշրջան կազմող այնպիսի հայտնագործությունների հետ, ինչպիսիք են՝ Գ. Կանտորի ստեղծած բազմությունների նախվ տեսությունը՝ իր հակասություններով, դրանց հաղթահարման նպատակով և Դ. Հիլբերտի կողմից ձևական մաթեմատիկական լեզվի ստեղծումը,

հետագայում Կ. Գյոդելի թեորեմի ի հայտ գալը, որը ցույց է տալիս Դ. Հիլբերտի գաղափարի անիրագործելիությունը և այլն:

Վեհի՝ որպես գեղեցիկի բարձրագույն աստիճանի, ընկալմանը կարող է նպաստել հանրակրթական դպրոցում մաթեմատիկայի կիրառական ոլորտի ուսուցումը: Արթիմեդի կողմից Հերոն թագավորի թագի մեջ ոսկու պարունակության որոշման վերաբերյալ խնդրի լուծումը թերևս շատ գեղեցիկ է, բայց այն հավանաբար վեհ չի կարելի անվանել: Մինչդեռ Ի. Նյուտոնի կողմից մեխանիկայի օրենքների մաթեմատիկական պարզ գրառումները անկասկած վեհ են: Դրանցում, իսկապես չափազանց պարզ մաթեմատիկական ձևերի մեջ, արտահայտվում են բնության հզոր օրինաչափությունները: Ահա այդ վեհն էր, որ Ի. Նյուտոնը համարեց Աստծո գոյության ապացույց: Վեհի նման դրսևորումներ կարելի է նկատել նաև բնագիտական այլ գիտությունների մեջ մաթեմատիկայի կիրառություններում: Ասվածից հետևում է, որ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում որպես վեհի դրսևորման աղբյուր կարող են ծառայել միջառարկայական կապերը:

Վեհին բնորոշ են հետաքրքրությունը, զարմանքը, հիացմունքը, որոնք, սակայն, հաճախ ուղեկցվում են նաև անհանգստությամբ, անբավարարվածությամբ և նմանատիպ այլ բացասական հուզական ապրումներով:

Մեզ թվում է, որ վեհի զգացմունքը առաջացնող մաթեմատիկական նյութերի ուսուցումը թեև կարող է լիովին ընկալելի չլինել սովորողների մեծ մասի կողմից, բայց կարող է նրանց մոտ առաջացնել որոշակի հետաքրքրություն ինչպես այդ նյութերի, այնպես էլ մաթեմատիկայի և աշխարհընկալման նկատմամբ՝ ընդհանրապես:

Ստորը և մաթեմատիկական կրթությունը: Ստորը վեհի հակադրությունն է: Մարդը վախենում է ինչպես վեհից, այնպես էլ նրա հակադրությունից՝ ստորից: «Արևը, լքելով աշխարհը, երկիրը թողնում է խավարի մեջ, և մահվան սարսափը պատում է բոլորին»։ այսպես են նկարագրում ստորը Հին եգիպտացիները: Արիստոտելը առաջին անգամ ստորը ներկայացնում է որպես գեղագիտական որակ:

Ստորը հիմնականում դեռևս լրիվ չգիտակացված, չտիրապետված երևույթ է, չի ենթարկվում մարդկանց և իրենից չափազանց մեծ վտանգ է ներկայացնում: Մարդկության կողմից հասարակական հարաբերություններին չտիրապետելը բերում է մի շարք վտանգավոր երևույթների՝ սպառազինություն, բռնակալություն, պատերազմներ և այլն, որոնք ստորի բարձր աստիճաններ են և վտանգավոր են նաև ողջ մարդկության համար:

Ուսուցչի կողմից ստորի դրսևորում է, երբ նա ողջ դասի ընթացքում մաթեմատիկայից չառաջադիմող աշակերտին ստիպում է հետևել դասին, նրա կողմից չընկալվող նյութի վերաբերյալ կատարվող զանազան գործողությունների: Ստոր է, նաև ուսուցչի վարքը, երբ նա աշակերտին զրկում են մաթեմատիկա իմանալու հաճույքից:

4. Կատակերգականը, ողբերգականը և մաթեմատիկական կրթությունը

Կատակերգականը: Թեև կատակերգականը բնորոշվում է որպես փիլիսոփայական-գեղագիտական կատեգորիա, որն արտահայտում է սոցիալական և գեղագիտական տեսակետից նշանակալից ծիծաղելին, սակայն այն որոշակիորեն տարբերվում է ծիծաղելիից: Միայն ֆիզիոլոգիական բնույթ ունեցող ծիծաղը, օրինակ, կատակերգական չէ (այդպիսին է, օրինակ, խտուտից առաջացած ծիծաղը): Իսկ մերկացնող սուր սատիրան և կատակերգականի որոշ այլ տեսակներ էլ ծիծաղելի չեն:

Փիլիսոփայության պատմության մեջ տարբեր մոտեցումներ են եղել ծիծաղելիի և կատակերգականի նկատմամբ: Պլատոնը գտնում է, որ ծիծաղելի են թույլ և վրեժ լուծելու ոչ ունակները, երբ նրանց ծաղրում են, հզոր մարդկանց տգիտությունը ատելի է, իսկ թույլերինը՝ ծիծաղելի, ծիծաղելի է մեծամտությունը այնտեղ, որտեղ այն ոչ-ոքի չի վնասում:

Միջնադարյան որոշ փիլիսոփաներ անդրադառնում են Աստծո և կատակերգականի փոխհարաբերության հարցին, ոմանք կասկածում են, օրինակ, Փրկչի ծիծաղելու ունակության վրա:

Բ. Սպինոզան քննարկում է բարոյականության հետ կատակերգականի փոխհարաբերության հարցը: Նա գտնում է, որ «Ծիծաղը ուրախության արտահայտություն է, ինչի պատճառով այն բարիք է» (տես [191]): Գ. Լեսինգը գտնում է, որ կատակերգությունը չի կարող բուժել հիվանդությունը, բայց կարող է ամրապնդել առողջությունը: Ի. Կանտը ծիծաղը համարում է հակասությունների հաշտեցման միջոց և գտնում, որ ծիծաղելի բաներ հիշելն անգամ մեզ ուրախացնում է: «Ծիծաղը առանձնապես վարակիչ է այն դեպքերում, երբ հարկ է լինում լուրջ երևալ, և ավելի ուժեղ ծիծաղում են նրա վրա, ով ունի հենց լուրջ տեսք: Ուժեղ ծիծաղը հոգնեցնում է և, ինչպես տխրությունը, ավարտվում է արցունքներով: Խտուտի ծիծաղը շատ տանջալից է: Եթե մեկի վրա ծիծաղում են, ապա նրանից

չեմ կարող նեղանալ անգամ այն դեպքում, եթե նա ինձ վնաս է պատճառում» (տես [105], հ.2. էջ 216): Անդրադառնալով ծիծաղի կամ ծաղրի ազդեցությանը, Կանտը նշում է, որ քիչ մարդիկ կարող են ամբոխի ներկայությամբ անվրդով տանել նրա ծաղրն ու ատելությունը, չնայած գիտակցում են, որ այդ ամբոխը կարող է կազմված լինել անկիրթ ու հիմար մարդկանցից:



Թատերական կատակերգության դիմակ.

մ.թ.ա. II դար, Աթենք

Ֆ. Շիլլերը անդրադառնում է կատակերգության մեջ հանդիսատեսի վիճակին. «Այն հանգիստ է, պարզ, ազատ, ուրախ, մենք մեզ չենք զգում ոչ ակտիվ, ոչ պասիվ, մենք ինքնամոռիված ենք, և ամեն ինչ մնում է մեզանից դուրս: Դա աստվածների իրավիճակն է, աստվածներ, որոնց մարդկային ոչինչ չի անհանգստացնում, որոնց չի վերաբերում որևէ բախտ, չի կաշկանդում որևէ օրենք» (տես [235], էջ 481): Ըստ Շիլլերի, սատիրան լավագույնս բացահայտում է իրականի և իդեալականի միջև եղած հակասությունը: Գ. Հեգելը կոմիզմի հիմքերը տեսնում էր ներքին անկարողության և արտաքին հիմնավորվածության միջև եղած հակասության մեջ: Բ. Կրոչեն անդրադառնալով կոմիկականի գեղագիտական խնդիրներին, գտնում է, որ նրա սահմանման բոլոր փորձերը կոմիկական են:

Կոմիկականի էությունը նաև հակասության մեջ է. այն կոնտրաստի, հակադրությունների արդյունք է: Արխատոտելի մոտ այն հակասություն է գեղեցիկի և տգեղի միջև, Կանտի մոտ՝ վեհի և ստորի, Հեգելի մոտ՝ կեղծի և ճշմարիտի, չիմնավորվածի և հիմնավորվածի, Շոպենհաուերի մոտ՝

բանականի և հիմարի, Բերգսոնի մոտ՝ ավտոմատի և կենդանու և այլն (տես [53]):



Ֆրանսիսկո Գոյա,

Ո՞վ է ավելի նվիրված, «Կարարիչիոս» շարքից, 1797-98

Կոմիկականում մեծ դեր ունի անսպասելիության գործոնը: Այսպես, Շ. Մոնտեսկյեն նկատում է. «Երբ անճոռնին անսպասելի է, ապա կարող է առաջացնել որոշ տեսակի ուրախություն, անգամ՝ ծիծաղ» (տես [142]): Իսկ Ի. Կանտը կոմիկականի էությունը տեսնում է լարված սպասումը հանկարծակի ոչնչի վերածվելու մեջ, ինչը նա բացահայտում է հետևյալ անեկդոտի միջոցով: Մի հնդկացի ճաշի էր հրավիրված անգլիացու մոտ: Երբ շամպայնի շիշը բացեցին և նրա պարունակությունը՝ փրփուրների տեսքով ցնդեց շի միջից, հնդկացին ապշած էր: Անգլիացու՝ «Ի՞նչ կա այստեղ զարմանալու» հարցին, նա պատասխանեց. «Ես չեմ զարմանում, որ փրփուրը դուրս փախավ շից: Զարմանում եմ, թե դուք ինչպե՞ս էիք այն մտցրել շի մեջ»: (տես [104], հ.2 էջ 216): Այս պատասխանի առաջացրած ծիծաղը, ըստ Կանտի, չի նշանակում, որ ծիծաղողը հնդկացուց բարձր է, այլ նշանակալից է նրանով, որ մեր լարված սպասումը հանկարծակի վերածվում է ոչնչի:

Կատակի, կոմիկականի նկատմամբ մարդու վերաբերմունքը արտահայտվում է ծիծաղով: Ծիծաղը իր բնույթով ժողովրդական է և ժո-

ղովրդավարական: Այն չի ճանաչում շերտավորվածություն, կարգ, աստիճաններ և հեղինակություններ, չի թույլ տալիս խոնարհվել դրանց առաջ: Օրծաղը հավասարության նշան է դնում անգամ սովորական մահկանացուի և թագավորի միջև: Այս տեսակետից ուսանելի է Անդերսենի հեքիաթը մերկ թագավորի մասին: Երբ թագավորի հպատակները համոզվում են թագավորի մերկ լինելու մեջ և սկսում են ծիծաղել, նրանք այլևս չեն խոնարհվում և պատվում նրան: Եվ եթե տարերային անարխիան ծնում է քաոս, ապա ծիծաղի տարրերը կարող է քաոսից ծնել ներդաշնակություն: Օրծաղը նաև վարակիչ է, ինչը ավելի է խորացնում ու մեծացնում նրա ժողովրդավարական արժեքն ու նշանակությունը:

Սրամտությունը հումորի ակտիվ, ստեղծագործական ձևն է: Եթե հումորի զգացումը կոմիկականի ընալման ունակությունն է, ապա սրամտությունը դրա ստեղծման ունակությունն է: Սրամտության տաղանդը հնարավորություն է տալիս խտացնել, գեղագիտորեն գնահատել և ավելի սուր ներկայացնել իրականության հակասությունները, որպեսզի տեսողական և զգացական դառնա դրանց կոմիզմը:

Կատակի նպատակը, սովորաբար, մարդկանց զվարճացնելն է, ինչն արտահայտվում է ծիծաղի միջոցով: Օրծաղը արտահայտում է հոգու կարևոր հատկանիշներ: Օրծաղի համար միայն կոմիկական իրադրությունը բավարար չէ: Անհրաժեշտ է ունենալ նաև դրա ընկալման ունակություն՝ հումորի զգացում, ինչը գեղագիտական զգացմունքի տեսակ է: Յու. Բորևը բերում է այդպիսի ունակությունների որոշակի ցանկ (տես [54]):

Օրծաղը քննադատական ուժ է, որ ունակ է ինչպես ժխտել և ավերել, այնպես էլ հաստատել ու արարել: Հարկ է, որ այն ձգտի վերացնելու անարդարությունը և արարելու արդարն ու կատարյալը:

Կոմիզմի հիմնական տեսակներն են հումորը, սատիրան, իրոնիան, սարկազմը, գրոտեսկը, կատակը, անեկդոտը, ձեռ առնելը և այլն: Հումորը բարեսիրտ, անշառ, բայց և ոչ անատամ ծիծաղն է, ժպիտը: Այն կատարելագործում է երևույթը, մաքրում է թերություններից, օգնում է բացահայտել նրանում հասարակայնորեն արժեքավորը և վերացնել այն: Սատիրան ժխտում է, ծաղրում ոչ կատարյալ երևույթը՝ այն արմատապես փոխելու, կատարյալի հետ համապատասխանեցնելու համար: Հեզնանքը կատակի կամ ծաղրի միջոցով ասում է հակառակը նրա, ինչ մարդ մտածում է, բայց ասում է այնպես, որ հասկացվի այն, ինչ մտածում է: Մարկագմը սուր, թունավոր հեզնանքն է, որ ասվում է վիրավորելու, ցավ

պատճառելու նպատակով: Գրոտեսկը կոնտրաստային, ծաղրանկարային, հիպերբոլային գուգորդումների միջոցով իրականի և ֆանտաստիկականի, ճշմարտանմանի և ոչ տրամաբանականի պատկերումն է: Կատակը հումորային բովանդակությամբ ոչ մեծ արտահայտություն է: Անեկդոտը կարճ, ծիծաղելի պատմություն է, որն ունի անսպասելի ավարտ: Ձեռ առնելը վիրավորող, արժանապատվությունը ոտնահարող կատակն է:



Օնորե Դոմե,

Վիկտոր Հյուգո, 1849

Մեծ չէ կոմիզմի և նրա տեսակների մասով մեր նախնիների թողած ժառանգությունը: Ահա մ.թ.ա. երրորդ դարի հունական մի կատակ: Ուսուցիչը, վարսավիրը և ճաղատը միասին ճամփորդելով, ստիպված են լինում գիշերել բաց երկնքի տակ և հերթով հերթապահում են իրենց իրերի մոտ: Վարսավիրը իր հերթապահության ձանձրույթը փարատում է սափրելով ուսուցչի գլուխը: Հերթապահության ավարտին արթնացնում է ուսուցչին, իսկ ինքը անմիջապես քնում է: Ուսուցիչը շոշափում է իր գլուխը և այնտեղ մազ չգտնելով, մտածում է. 'Ինչքան հիմար են այս սափրիչները. ես մեկը ինձ արթնացնելու փոխարեն, ճաղատին է արթնացրել':

Ժամանակակից մարդու կյանքում դրական մեծ նշանակություն ունի անեկդոտը: Այն ավելացնում է մարդու կենսական ներուժը, հաղորդում է դրական լիցքեր: Անեկդոտները լայն տարածում են ստացել, անգամ կատարվում է դրանց դասակարգում ըստ թեմաների: Ահա մի անեկդոտ Լենինի թեմայով: Երկար քննարկումներից հետո Աստվածն ու Սատանան որոշեցին Լենինի հոգին ուղարկել դժոխք: Որոշ ժամանակ անց Սատանան բողոքեց Աստծուն, թե՝ «Վերցրու Լենինին քեզ մոտ, որովհետև իմ ձտերը ապստամբություն են բարձրացրել ու իրենց դժոխային աշխատանքի դիմաց դրախտային կյանք են ուզում»: Աստված համաձայնում է: Որոշ ժամանակ անց Սատանան նորից է հանդիպում Աստծո հետ ու հարցնում, թե «Հը, Աստված, ո՞նց է Լենինը»: Աստված գայրանում է Սատանի վրա, թե՝ «Նախ ոչ թե Աստված, այլ ընկեր Աստված, հետո էլ՝ Աստված չկա և, վերջապես, ինձ մի զբաղեցրու, որովհետև ժողովից ուշանում եմ»:

Լայն տարածում ունի հայկական ռադիոյի թեման: Ահա մի նմուշ: Հայկական ռադիոյին հարցնում են. «Կա՞րդյոք կյանք Մարսի վրա»: Հայկական ռադիոն պատասխանում է. «Էնտեղ էլ չկա»:

Կատակերգականը և մաթեմատիկական կրթությունը: Կատակերգականը բոլոր ժամանակներում մեծ տեղ է ունեցել մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում՝ հանդես գալով որպես այդ գործընթացի երևակայականով և լրջությամբ հագեցված էությունը կատակի, զվարճանքի տարրերով մեղմելու գործոն: Ընդ որում, այստեղ կատակերգականը դրսևորվում է զանազան ձևերով:

Մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական գործունեության հետ կատակերգականի հանդես գալը մեծապես պայմանավորված է մաթեմատիկական դատողությունների անսպասելիության դրսևորմամբ, ինչը կապված է նաև վերջինիս մաթեմատիկական գեղեցիկի սուրյեկտիվ հատկանիշ լինելով: Ընդ որում, ինչպես նշում է Մենտեսկյեն, «երևույթին կատակերգական երանգ հաղորդելու համար անսպասելին պետք է լինի անճոռնի»: Մաթեմատիկայի պարագայում այդ անճոռնին կարող է լինել ակնհայտ սխալը, որն ստացվել է մաթեմատիկական «ճշգրիտ» դատողությունների միջոցով (ավելի անճոռնի բան մաթեմատիկայում դժվար է պատկերացնել): Հասկանալի է, որ նման դատողությունները իրենց մեջ պարունակում են քողարկված սխալներ, որոնք առաջին հայացքից դժվար է նկատել և որոնց հայտնաբերումն էլ բավարարվածություն, ուրախություն է հաղորդում: Այդպիսի իրադրություններ դիտարկվել են դեռևս անտիկ Հունաս-

տանում, սոֆիստների կողմից, որոնք փորձել են «ապացուցել» ակնհայտ կեղծ դրույթներ:

Առաջիկայում՝ ապացուցումների բաժնում մենք կդիտարկենք սոֆիստական ապացուցումների օրինակներ, մասնավորապես՝ Զենոնի որոշ ապորիաներ, որոնք աշակերտների (ինչու միայն աշակերտների) մոտ առաջացնում են ինչպես զարմանք ու տարակուսանք, այնպես էլ զվարճանք ու ծիծաղ:

Բազմազան են նաև բուն մաթեմատիկայում և նրա ուսուցման գործընթացում կիրառվող քողարկված սխալ դատողությունները: Նման օրինակները, ինչպես նշվեց վերևում, հետաքրքրություն, աշխույժություն են հաղորդում դասավանդման գործընթացին, միաժամանակ, դրանք նպատակ ունեն ստուգելու սովորողների իմացության մակարդակը: [9]-[11] դասագրքերում յուրաքանչյուր պարագրաֆից հետո բերված են նման վարժություններ, որոնք վերաբերում են հենց այդ պարագրաֆում գետեղված նյութին: Բերենք մի քանի օրինակներ:

Ապացուցենք, որ $2=3$: Իսկապես, ունենք $4-10=9-15$ կամ $4-10+(25/4)=3-15+(25/4)$ և $2^2-2\cdot 2(5/2)+(5/2)^2=3^2-2\cdot 3(5/2)+(5/2)^2$: Այստեղից կստանանք $(2-5/2)^2=(3-5/2)^2$: Հետևաբար՝ $2-5/2=3-5/2$ և, ուրեմն, $2=3$:

Այժմ էլ ցույց տանք, որ $2 > 3$: Իսկապես, ունենք $1/4 > 1/8$: Հետևապես՝ $(1/2)^2 > (1/2)^3$: Անհավասարության երկու մասերը լոգարիթմենք 10 հիմքով, կունենանք՝ $2\log_{10}(1/2) > 3\log_{10}(1/2)$: Ստացված անհավասարության երկու մասերը բաժանելով $\log_{10}(1/2)$ թվի վրա, կստանանք $2 > 3$:

Մի՞թե զավարճալի չեն մեր ստացված արդյունքները: Իսկ դրանց հերքումը կամ մեր դատողություններում սխալների հայտնաբերումը: Դրանք իսկապես բավարարվածություն և հաճույք են պարգևում և մեծ հետաքրքրություն առաջացնում ոչ միայն սովորողների շրջանում:

Ընդհանրապես, խնդրի կամ հանելուկի առաջադրումը և լուծումը իր մեջ պարունակում է կատակերգականի երանգներ և դրանով նպաստում է կյանքի առօրեական տաղտուկի հաղթահարմանը: Սա գիտակցել են նաև մեր նախնիները և խնդիրների ու հանելուկների առաջադրման լուծման պրակտիկան լայնորեն կիրառել իրենց կենցաղում՝ այն դարձնելով ավանդական խնջույքի կարևոր բաղկացուցիչ մաս: Եվ դա վերաբերում է հայկական իրականության սոցիալական բոլոր խավերին՝ սկսած թագավորից, վերջացած սովորական գյուղացիով:

Այսպես, հայոց արքաների խնջույքը բաղկացած է եղել երեք մասից. հացկերույթ, զինարրուք և հոգևոր մաս: Վերջինիս ընթացքում էլ կատար-

վել է խնդիրների ու հանելուկների վերը նշված առաջադրումը (տես [35]): Ինչպես նշում է Հ. Պետրոսյանը, «միջնադարյան հայ միտքը մեկ անգամ չէ, որ մշակութային-հոգևոր-բարոյական գաղափարների տարածման համար լայնորեն օգտագործել է ժողովրդական աշխարհընկալման, սովորույթների և ծեսերի գանազան կողմերը» (տես [35]): Նման մտահղացումների իրականացման համար օգտագործվել են ինչպես արդեն ստեղծված մշակութային արժեքները, այնպես էլ գրվել են հատուկ այդ նպատակներին միտված աշխատություններ: Այս տեսակետից հատկանշական են, օրինակ, Ներսես Շնորհալու հանելուկները և Մխիթար Գոշի, Վարդան Այգեկցու առակները, Անանիա Շիրակացու խնդիրները:

Հայտնի է, որ «առաջին եվրոպացի» Կառլուս Մեծը ժամանակակից Եվրոպայի հիմքերը դրեց իր հսկա կայսրության Ախեն մայրաքաղաքում ակադեմիայի հիմնադրմամբ, որը զլխավորելու համար անգլիական Յորք քաղաքից հրավիրեց ժամանակի մեծագույն մտածող գիտնական, աստվածաբան և պոետ Ալկուիսին, իսկ վերջինս՝ այդ պաշտոնում առաջին ձեռնարկումներից մեկը եղավ «Մտքի մարզանքի համար» մաթեմատիկական հետաքրքրաշարժ խնդիրների խնդրագրքի կազմումը: Սակայն, դրանից մոտ երկու դար առաջ կիսանկախ և փոքրիկ Հայաստանում Անանիա Շիրակացին գրեց մաթեմատիկայի իր խնդրագիրքը: Այդ խնդրագրքի խնդիրները՝ իրենց հետաքրքրաշարժությամբ թեև չունեին Ալկուիսի խնդրագրքի գեղագիտական հմայքը, սակայն անհամեմատ գերազանցում էին վերջինիս մաթեմատիկական բովանդակության խորությամբ և կրթական նշանակությամբ:

Շիրակացու խնդրագիրքը լրացվում է նրա ինը խրախճանականներով: Դրանք, իրենց հիմքում ընկած տրամաբանական կառուցվածքի բարդությամբ և խստությամբ, իրենց հնարամտությամբ դարձյալ զիջում են Ալկուիսի խնդիրներին: Սակայն, ինչպես գրում է Հ. Պետրոսյանը, Շիրակացու խրախճանականները ունեցել են խրախճանքների ժամանակ մասնակիցներին առաջադրվելու նպատակ (տես [35]): Շիրակացին ինքն էլ է հաստատում դա, խրախճանականների սկզբում գրելով. «Գրում եմ ձեզ համար խրախճանականներ, որպեսզի դուք [օգտվելով նրանցից], երբ կերոյխումի ժամանակ զվարճանում եք և ցանկանում եք զվարճալի և ծիծաղելի մի բան ասել» (տես [33], էջ 62): Այսպիսով, Շիրակացու խրախճանականները կատարում էին նաև այլ արժեքների հետ ճշմարտական արժեքի արտաձգման և փոխլրացման միջոցով հոգևոր արժեքների տարածման և արմատավորման գործառույթ, ինչը չի կարելի ասել Ալկուիսի

խնդիրների մասին: Նշեք նաև, որ մաթեմատիկական խնդիրների միջոցով նման գործառույթ էր իրականացվում արդեն Լուսավորության շրջանի Հոլանդիայում՝ քաղաքների սյուներին լուծման ենթակա մաթեմատիկական խնդիրներ փակցնելով: Նման խնդիրներից մեկի լուծումը նպաստեց, օրինակ, ֆրանսիական բանակի քսանամյա զինվոր Ռենե Դեկարտի հետագա առաջընթացին՝ գիտության ասպարեզում:

Վերադառնալով Շիրակացու խրախճանականների և, ընդհանրապես, խնդիրների արժեքանական գործառույթներին, նշենք, որ դրանց իրականացման նախադրյալները առկա են այդ խնդիրների բովանդակային տրամաբանական կառույցներում, նրանց կիրառական ֆոնի և շարադրանքի ոճի մեջ: Ինչպես նշում է Հ. Օրբելին, «Անանիայի խնդիրները զբաղեցնող են, կենսալից, պարզ: Խնդիրների թեմաները մեծամասամբ վերցված են Անանիային շրջապատող կենցաղից, գործողության վայրը նրա հայրենի Շիրակն է և նրան հարևան վայրերը, գործող անձինք, էթե կոչվում են անուններով, տեղական իշխաններն են՝ Կամսարականները, այդ թվում և Անանիայի ժամանակակից Ներսեի» (տես [150]):

Ավելացնենք, որ Շիրակացու խնդիրների և դրանց լուծման պարզության հետևում հաճախ թաքնված են տրամաբանական խորությունը և անսպասելիությունը, որոնք լինելով գիտական գեղեցիկի հատկանիշներ, լրացուցիչ գեղագիտական հմայք են հաղորդում մաթեմատիկական նյութին: Այս տեսակետից ուշադրության է արժանի Շիրակացու խրախճանականներից առաջինը: Ահա այն.

Ասա ընկերոջդ՝ «Ես կարող եմ իմանալ, թե դու որ ժամին ես ցանկանում ճաշել և քանի նվազ գինի ես ուզում խմել»: Եթե նա ասի քեզ, թե՝ «Բմացիր», սոսա նրան. «Մտքումդ պահիր այն ժամերի քանակությունը, երբ ցանկանում ես ճաշել: Կրկնիր այն: Ավելացրու նրա վրա ևս հինգ: Բազմապատկիր հինգով, նրա վրա ավելացրու տասը և տասով բազմապատկիր: Նրա վրա ավելացրու իմած գինին՝ քանի նվազում ուզում ես խմել»: Եբբ նա կատարի քո ասածները, այն ժամանակ հարցրու նրան, թե որքան է հաշված թվերի գումարը: Եվ նա ինչ թվով որ ասելու լինի, նրանից միշտ դուրս հանիր 350, մնացած թվի մեջ տես, թե քանի հարյուրավոր կա, այն ժամին է լինելու նրա ճաշը, իսկ հարյուրից պակաս մնացած թիվը իմացիր, որ այդքան նվազ է նա գինի խմելու: Իսկ եթե ընկերդ անհմուտ մեկն է և գինի խմելու նվազը հարյուր լինի, պատասխանիր, որ անհնար է մեկ ժամում հարյուր նվազ գինի խմել» (տես [33]):

Ժամանակակից մաթեմատիկական լեզվով՝ այստեղ Շիրակացին, ըստ էության, խնդրի մոդելավորումը հանգեցնում է երկու անհայտով անորոշ հավասարման, սակայն ոչ անպայման՝ ամբողջ գործակիցներով, ինչպես Դիոֆանտի մոտ է, և Շիրակացու լուծումն էլ ոչ թե կատարվում է նման անորոշ հավասարումների լուծման հայտնի եղանակներով, այլ մաթեմատիկական գիտելիքի և կիրառական ոլորտի հնարամիտ գուգակցմամբ: Նման մոտեցումը բացառիկ է. այն նմանը չունի մաթեմատիկական կրթության հետագա, նաև՝ ժամանակակից դրսևորումներում: Իսկ լուծման անսպասելությունը, կատակերգականի հետ միասին, խնդրին հաղորդում է վերևում նշված գեղագիտական գրավչությունը:

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում կատակերգականը հիմնականում դրսևորվում է խնդիրների բովանդակության ու դրանց լուծումների մեջ: Դրանք նաև ծիծաղի կարևոր աղբյուրներ են: Այս տեսակետից ուշագրավ են Գ Օստերի կողմից առաջադրված խնդիրները (տես [152]): Դրանք առաջին հայացքից հեռու են հասարակության կողմից ընդունված բարոյական նորմերից ու մոտեցումներից և, թվում է, կարող են սովորողների մոտ ձևավորել բարոյական ոչ դրական որակներ: Ժամանակին որոշ հայ հեղինակներ իրենց մեթոդական փոքրիկ ձեռնարկում ներառեցին մի քանի նման խնդիրներ, և ֆեյսբուքյան սոցիալական ողջ ցանցը մի քանի օր անընդհատ զբաղված էր այդ հեղինակների «հակամանկավարժական» գործունեությունը դատապարտելով: Ես նույնպես կարդացի այդ թարգմանությունները և, որովհետև հումանիտար ոլորտում ճշմարտության որոնման լավագույն եղանակը պրակտիկան է, փորձեցի այդ խնդիրները քննարկել տարրական դպրոցի աշակերտ իմ Հայկ թոռան ու ընկերոջ հետ: Առաջին խնդիրը կարդալուց հետո ես անհամբեր սպասում էի Հայկի ռեակցիային: Նա զարմացած նայեց ինձ, նայեց-նայեց ու ... բռնկվեց մի վարակիչ ծիծաղով: Դե իր համար մաթեմի դասերը միշտ են հետաքրքիր, բայց խոստովանեց, որ եթե երբեմն-երբեմն դիտարկվեն նման խնդիրներ, ապա այդ դասերը կարող են հետաքրքիր դառնալ նաև ծուլիկների համար: Ահա դրանցից մի քանիսը:

Երբ Կոլյան եկավ իր ընկեր Տոլյայի ծննդին, նա իր նվերի հետ միասին կշռում էր 26 կգ 100 գրամ: Այստեղ նա կերավ 40 կոնֆետ՝ յուրաքանչյուրը 10 գրամ, 10 խնձոր՝ յուրաքանչյուրը 100 գրամ և 2 կգ 500 գ կշռող մի տորթ՝ ամբողջությամբ: Ինչքան էր կշռում Կոլյան ծնունդից վերադառնալիս, եթե հայտնի է, որ նվերը նա հետը տուն տարավ:

Կոլյան երագում է ուտել մի շոկոլադ, որի երկարությունը երկու մետր է, իսկ լայնությունը՝ մեկ մետր: Տոլյան էլ երագում է ուտել նույն երկարությամբ շոկոլադ, որի երկարությունը նույնն է, բայց մակերեսը երեք անգամ մեծ է: Ինչքա՞նով է Տոլյայի երագած շոկոլադի լայնությունը երկար նրա սեփական երկարությունից:

Քառասուն տատիկներ հրավիրված էին մի պապիկի ծնունդին: Նրանցից յուրաքանչյուրը նվեր տարավ երկու սանր: Քանի՞ սանր նվեր ստացավ այդ պապիկը, եթե նա լրիվ ճաղատ էր:

Ողբերգականը: Ողբերգականը կատակերգականի հակադրությունն է: Անտիկ շրջանի գեղարվեստական մշակույթի մեջ ողբերգությունը գրավում էր առաջատար դիրքեր: Ըստ Արիստոտելի, ողբերգությունը արվեստի բարձրակետն է, այն պատկերում է մարդու անցումը երջանկությունից սպերջանկության: «Ողբերգությունը արտացոլում է սարսափելին և թշվառը, ինչը տեղի է ունենում առանձնապես այն ժամանակ, երբ այն անսպասելի է, մանավանդ՝ երբ սպասումներին հակառակ է, և այդ դեպքում զարմանքը ստանում է մեծ ուժ» (տես [45]): Արիստոտելը գտնում է, որ ողբերգությունը հանդիսատեսի հոգու մաքրումն է վախի և կարեկցանքի միջոցով, որոնք ծնվում են ողբերգական գործողությամբ: Ի. Կանտը գտնում է, որ ողբերգությունը արթնացնում է վեհի, իսկ կատակերգությունը՝ գեղեցիկի զգացում:

Մարդու կյանքը ողբերգական է, որովհետև ի վերջո նա մահկանացու է, իսկ նրան շրջապատող հասարակությունը չի ապահովում երջանկության անհրաժեշտ պայմաններ. պատերազմները, անազատությունը, անարդարությունը, հանցագործությունները և այլ բացասական երևույթներ ցույց են տալիս, որ հասարակությունը շատ հեռու է կատարյալ լինելուց: Սակայն բնությունն ինքը, տարվա եղանակների հաջորդելիությամբ, աշնանային տերևաթափից հետո բերում է ձյուն ու ձմեռ, ինչին հետոմ է զարնան զարթոնքը, հարություն և վերածնունդ: Հետևելով բնությանը, դեռևս հնադարում մարդիկ ստեղծել են իրենց աստվածները, որոնք ունենին ոչ միայն անմահության, այլև հարություն առնելու գորություն: Դա արտահայտվում է նաև հոգու անմահության, անդրժիրիմյան աշխարհի գոյության, մարդկային կերպի փոխարինելիության ծեսերի և այլ միջոցներով, հեքիաթներում, բանահյուսության մեջ և արվեստի այլ բնագավառներում: Այս գաղափարը արտահայտվում է նաև գրականության և երաժշտության բազմաթիվ ստեղծագործություններում, ինչը մարդու մոտ առաջացնում է ողբերգականին հաջորդող բնական ուրախություն: Դրանցում ողբերգա-

կան զգացմունքը արտահայտվում է նաև որպես խորը թախիծի և բարձր հիացմունքի գուգորդում:

Միևնույն ժամանակ, թեև մարդը աշխարհից գնում է առհավետ, սակայն նրա ժառանգը ծնվում է իր նմանությամբ, այսինքն՝ գենետիկական հիշողությունը մարդուց ինչ-որ բան պահպանում է: Սակայն ավելի զորեղ է ոչ գենետիկական հիշողությունը՝ մշակույթը, ինչը որպես հիշողություն պահպանում է մարդու արած գործը, նրա թողած հոգևոր արժեքները: Եվ նաև կյանքի հարստությունը, և աշխարհի գույները, սովորականի նշանակալից լինելը ու մեծությունը մարդն ավելի սուր է զգում, երբ մահը կողքին է: Ահա ողբերգությունը մահվան միջոցով բացահայտում է ճշմարտության պահը, բնոգծում ճշմարտության և կեղծիքի, բարու և չարի տարբերությունը, մարդու գոյության և կյանքի իմաստը: Ողբերգականը միշտ լավատեսական է: Այն բացահայտում է անձի ծանր տառապանքները, ցույց է տալիս կորստի անդառնալիությունը, բացահայտում է հարազատների, ժողովրդի մեջ իր գործերով անմահ լինելու հանգամանքը, աշխարհի և կյանքի իմաստի մասին փիլիսոփայական մտորումների առիթ է տալիս, ի հայտ է բերում պատմականորեն չլուծված հակասությունները, ծնում է ցավակցության զգացմունք, ինչը զուգորդվում է ուրախության հետ, ունի մարդու հոգին մաքրող ազդեցություն:

Ողբերգականը և մաթեմատիկական կրթությունը: Ի տարբերություն կատակերգականի, ողբերգականի հետ մաթեմատիկայի առնչությունները շատ չեն: Որոշ դեպքերում անգամ մաթեմատիկան խանգարում է ողբերգականի որոշ գործառույթների իրականացմանը, ինչը առաջին հերթին վերաբերում է մտածողության հետ ողբերգականի և մաթեմատիկայի առնչություններին: Մի կողմից մարդը իր գիտակցության շնորհիվ առանձնանալով կենդանական աշխարհում, հասնում է նաև մահվան գիտակցության, ինչը ողբերգականի ցայտուն դրսևորում է: Եվ թեև աստվածների, անդրշիրիմյան կյանքի և այլնի մասին զանազան տեսությունների ստեղծման միջոցով մարդն, այնուամենայնիվ, փորձում է մեղմել կամ հաղթահարել իր այդ ողբերգությունը, սակայն մաթեմատիկան այստեղ մարդուն ավելի շատ խանգարում է իր այդ սփոփանքում, քանի որ ապացուցման մաթեմատիկական ընկալման մեջ, որը հիմնարար դեր է խաղում մտածողության մեջ, որևէ կերպ չի տեղավորվում Աստծո, անդրշիրիմյան կյանքի և նմանատիպ այլ վարկածների գոյության ապացուցումը: